FONDO NUNZIATELLA

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XXVI

Palchetto C

Num.° d' ordine 160

26 16 77 24

NAZIONALE
B. Prov.
XXV
60
BIBLIOTECA
VITT. EMANUELE III
NAPOLI

I 2617-25
I 294 78
I 293 20
I 2025
I 635 b. I
I
294
Inventl 316
BIB. PROV.
XXV
60

ELEMENTI

DI

MATEMATICA.

66447
SBN

ELEMENTI
DI
MATEMATICA

Compoſti per uſo della

REALE ACCADEMIA MILITARE

DAL PROFESSORE DI FISICA SPERIMENTALE,
E CHIMICA, E DIRETTORE DELLE
SCIENZE DELLA MEDESIMA

VITO CARAVELLI.

TOMO II.

BIBLIOTECA PROVINCIALE DI NAPOLI

VITTORIO EMANUELE III - BIBLIOTECA NAZIONALE - NAPOLI

R. A. M

IN NAPOLI MDCCXCIII.
PRESSO GAETANO RAIMONDI
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

ELEMENTI

DI

GEOMETRIA

PIANA.

Edizione 6. fatta in Ottobre 1793.

INDICE

DE' CAPI CONTENUTI IN QUESTO TOMO.

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI. pag. 1.
POSTULATI. 15
ASSIOMI. 17

LIBRO I.

Delle teoriche fondamentali della Geometria Piana.

CAP. I. *Delle operazioni fondamentali della Geometria piana.* 20
CAP. II. *Della teorica delle linee rette perpendicolari, e obblique ad altre.* 26
CAP. III. *Della teorica delle linee rette parallele.* 31
CAP. IV. *Delle proprietà de' triangoli e per riſpetto degli angoli, e per riſpetto de' lati.* 37

CAP. V.

CAP. V. *Della perfetta uguaglianza de' triangoli.* 43
CAP. VI. *Delle proprietà fondamentali de' parallelogrammi, e della semplice uguaglianza si de' parallelogrammi, che de' triangoli.* 47
CAP. VII. *Della teorica de' rettangoli, e quadrati.* 53
CAP. VIII. *Della quantità de' quadrati formati su i lati de' triangoli.* 64
CAP. IX. *Si sciolgono alcuni problemi, che appartengono alla teorica de' quadrati, e de' rettangoli.* 68

LIBRO II.

Della teorica del Cerchio.

CAP. I. *Del sito che ha il centro nel cerchio, e del modo di trovarlo.* 72
CAP. II. *Dell' ordine, che serbano nella grandezza le rette tirate alla periferia di qualunque cerchio.* 77
CAP. III. *Delle tangenti de' cerchi, e del modo di tirarle.* 83

CAP. IV. *Degli angoli formati e ai centri, e alle periferie de' cerchi.* 88
CAP. V. *Dell' uguaglianza de' rettangoli formati dalle rette, le quali, incontrandosi dentro, o fuori del cerchio, tramezzano tra 'l punto dell' incontro, e la periferia.* 103
CAP. VI. *Delle iscrizioni si delle figure regolari ne' cerchi, che de' cerchi nelle figure regolari, e delle circoscrizioni tanto delle figure regolari intorno a' cerchi, quanto de' cerchi intorno alle figure regolari.* 109

LIBRO III.

Della dottrina della Ragione, e Proporzione geometrica.

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI. 135
CAP. I. *De' caratteri da conoscere l'uguaglianza, e la disuguaglianza delle ragioni; e dell' uso di tali caratteri in determinare di quali grandezze le ragio-*

ragioni ſono uguali, e di quali ſono diſuguali. 148

CAP. II. *Della dottrina della ragione compoſta.* 156

CAP. III. *Delle principali trasformazioni, che ſi poſſono fare nelle due ragioni di qualſiſia proporzione geometrica, ſenza togliere la proporzione.* 161

CAP. IV. *Delle proprietà della proporzione, che ha tutt' i termini omogenei.* 164

CAP. V. *Della teorica delle grandezze, che hanno tra eſſe ragioni ordinate, e perturbate, e di ciò, che da tale teorica deriva.* 168

LIBRO IV.

Delle tioriche più relevanti della Geom. Piana, che dalla dottrina della ragione, e della proporzione geometrica derivano.

CAP. I. *Delle ragioni uguali, che ſi poſſono avere con dividere uno, o due lati di qualunque triangolo.* 174

CAP. II. *De' caratteri da conoſcere e la ſimiglianza de' triangoli, e quella de' parallelogrammi.* 179

CAP. III. *Del modo di dividere qualunque retta ſecondo qualſivoglia data ragione; e del modo di trovare una retta, che ſia in proporzione con altre rette date.* 188

CAP. IV. *Delle ragioni de' triangoli, e de' parallelogrammi.* 195

CAP. V. *Dell' uguaglianza de' triangoli, e de' parallegrammi, che hanno le baſi in ragione reciproca delle altezze; e dell' uguaglianza de' rettangoli formati da rette proporzionali.* 199

CAP. VI. *Della ragione, e proporzionalità de' rettilinei ſimili, e de' principali probl. appartenenti alla teorica de' medeſimi rettilinei ſimili.* 203

CAP. VII. *Delle ragioni degli angoli fatti e ai centri, e alle circonferenze de' cerchi, e di quelle de' ſettori circolari.* 210

CAP. VIII. *Delle ragioni, che hanno le periferie circolari, i cerchi, i ſettori, e le porzioni di eſſi, e della quadratura di tali ſpazj.* 215

CAP. IX. *Della ragione, che ſenza ſenſibile errore ſi può prendere per quella del diametro di qualunque cerchio alla ſua periferia.* 222

ELEMENTI
DI
GEOMETRIA
PIANA.

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

DEFINIZIONE I.

1. LA *Geometria* è una ſcienza, che tratta della quantità continua, dimoſtrandone le proprietà di eſſa.

AVVERTIMENTO.

2. Le ſpezie della quantità continua ſono

i ſolidi, le ſuperficie, e le linee.

DEFINIZIONE II.

3. Si dice *ſolido*, o *corpo* ogni eſtenſione, o ogni ſpazio, che ha lunghezza, larghezza, e profondità.

DEFINIZIONE III.

4. Ciò, che termina, o racchiude il ſolido, ſi dice *ſuperficie*.

COROLLARIO.

5. Dunque la ſuperficie non ha profondità; e perciò è eſſa una eſtenſione, che ha ſolamente lunghezza, e larghezza.

DEFINIZIONE IV.

6. Ciò che termina, o racchiude la ſuperficie, ſi dice *linea*.

COROLLARIO.

7. Sicchè la linea è ſenza profondità, e ſenza larghezza; e perciò è eſſa una eſtenſione, che ha ſolamente lunghezza.

DE-

DEFINIZIONE V.

8. Ciò, che termina, o racchiude la linea ne' ſuoi eſtremi, ſi chiama *punto*.

COROLLARIO I.

9. Il punto adunque è privo di profondità, di larghezza, e di lunghezza; onde non ha eſſo grandezza alcuna.

COROLLARIO II.

10. Non eſſendo ciò, che termina una grandezza parte componente di eſſa, ma eſtremo degli ultimi ſuoi componenti; ne ſegue non eſſere i punti parti delle linee, le linee parti delle ſuperficie, e le ſuperficie parti de' ſolidi. E' errore dunque il credere le linee compoſte da punti, le ſuperficie compoſte da linee, ed i ſolidi compoſti da ſuperficie.

COROLLARIO III.

11. Finalmente eſſendo i punti eſtremi delle linee, e le linee eſtremi delle ſuperficie: ſe due linee, o due ſuperficie s' interſecano; perchè quello, in cui s' interſecano, è eſtremo delle parti interſecate; ſarà eſſo un punto, ſe s' interſecheranno due li-

nee ; ed una linea , se s' interſecheranno due ſuperficie . Onde nè le linee , nè le ſuperficie , che s' interſecano , hanno comune alcuna porzione di eſſe .

AVVERTIMENTO.

12. Si noti che , per un mero concetto matematico , ſi conſidera generata la linea dallo ſcorrere d' un punto , la ſuperficie dallo ſcorrere lateralmente d' una linea , e 'l ſolido generato dal muoverſi su , o giù d' una ſuperficie .

DEFINIZIONE VI.

13. Una linea ſi dice *retta* , se niuna delle ſue panti è fuori della direzione delle altre ; ſi dice poi *curva* , se ognuna delle ſue parti è fuori della direzione della ſua vicina .

DEFINIZIONE VII.

14. Una ſuperficie ſi dice *piana* , se niuna delle ſue parti è fuori della direzione delle altre ; ſi dice poi *curva* , se ognuna delle ſue parti è fuori della direzione della ſua vicina .

DEFINIZIONE VIII.

15. Si chiama *angolo piano* la ſcambievole inclinazione di due linee, che, giacenti in un' iſteſſo piano, s' incontrano ſenza formare una linea continuata. Il punto dell' incontro ſi dice *vertice*, e le due linee ſi dicono *lati* dell' angolo.

DEFINIZIONE IX.

16. L'angolo piano ſi dice *rettilineo*, s'è formato da due linee rette; *curvilineo*, s'è formato da due linee curve; e *miſtilineo*, s' è fatto da una linea retta, ed una linea curva.

AVVERTIMENTO.

17. I Geometri contraſſegnano ſulle ſuperficie i punti, con farvi su di eſſe piccioli ſegni coll' eſtremità della penna da ſcrivere, o di altro corpo aguzzo; e le linee con tratti di penna, o d' altro corpo aguzzo. Per eſprimere poi un punto, una linea, ed un' angolo, mettono una lettera a lato del punto, due agli eſtremi della linea, e tre agli eſtremi di quelle, che formano l' angolo, e dicono: il punto A: la linea retta BC: la linea curva DE: l'angolo rettilineo FGH, o HGF: l'angolo curvilineo IKL: e

l'angolo miſtilineo MNO, nominando ſempre in mezzo la lettera, che ſta al vertice; ovvero dicono l'angolo in G, in K, in N, nominando la ſola lettera, ch' è al vertice, purchè non ne poſſa naſcere equivoco.

DEFINIZIONE X.

18. Si dirà *base* d' un' angolo rettilineo la linea retta, che congiugnerà gli eſtremi de' ſuoi lati.

COROLLARIO.

19. Conſiſtendo l'angolo piano nell' inclinazione delle due linee, dalle quali viene formato: ſecondochè ſi farà eſſo maggiore, o minore; così gli eſtremi de' ſuoi lati ſi renderanno più, o meno diſtanti tra di eſſi, e conſeguentemente la baſe ſi farà maggiore, o minore: e ſecondocchè gli eſtremi de' lati ſi faranno più, o meno diſtanti tra di eſſi, e conſeguentemente la baſe ſi farà maggiore, o minore; così l' angolo ſi farà anche maggiore, o minore. Quindi ſe due angoli rettilinei ABC, DEF hanno i lati riſpettivamente uguali, cioè il lato AB = DE, e BC = EF: ſecondochè ſarà l' angolo ABC maggiore, uguale, o minore dell' angolo DEF; così la baſe AC ſarà maggiore, uguale, o minore della baſe DF: e ſecondoche la baſe AC ſarà maggiore, uguale, o mi-

Fig. 2.

minore della baſe DF ; così anche l'angolo ABC sarà maggiore, uguale, o minore dell' angolo DEF.

DEFINIZIONE XI.

20. Una linea retta ſi dice *perpendicolare* ad un'altra, se l'una cade ſull' altra, ſenza inclinarſi più dall' una, che dall' altra banda ; ſi dice poi *obbliqua*, se dall' una più, che dall' altra banda s' inclina. Finalmente gli angoli, che da ambedue le parti ſi formano in tutti e due i caſi, ſi chiamano *angoli conſeguenti* ; ed uno ſi dice pure *conſeguente* dell' altro.

DEFINIZIONE XII.

21. Si dice *angolo retto* quello, ch' è formato da due linee rette, quando l' una è perpendicolare all' altra. Si dicono poi *angolo ottuſo* quello, ch' è maggiore del retto, ed *angolo acuto* quello, ch' è minore del retto.

Così se a CD ſarà perpendicolare la retta AB, e obbliqua la retta EB ; ſarà retto sì Fig. 3.
l' angolo ABC, che 'l ſuo conſeguente uguale ABD ; e ſaranno l' angolo EBC ottuſo, e l' angolo EBD acuto.

DEFINIZIONE XIII.

22. Due angoli si dicono *verticali* tra essi, se i lati di uno formano co' lati dell' altro linee continuate.

Fig. 4. *Così l' angolo AOC si dice verticale coll' angolo BOD, e COB verticale con AOD.*

DEFINIZIONE XIV.

23. Due linee rette, esistenti sull' istesso piano, si dicono *parallele*, sè, prolungandole all' infinito da ambedue le parti, non s' uniscono giammai.

Fig. 5. *Di tal sorta sono le rette AB, CD.*

DEFINIZIONE XV.

24. *Termine* di checcheſſia si dice ciò, ch' è suo estremo.

AVVERTIMENTO.

25. I termini, che si considerano in Geometria, si riducono a punti, a linee, ed a superficie. I punti sono termini delle linee, le linee termini delle superficie, e le superficie termini de' solidi; perchè i punti sono estremi delle linee, le linee estremi delle superficie, e le superficie estremi de' solidi.

DE-

DEFINIZIONE XVI.

26. Si dice in generale *figura* ogni ſpazio racchiuſo da tutte le parti da uno, o da più termini; cioè da una, o più linee, da una, o più ſuperficie. In iſpezie poi ſi dicono *figura piana* ogni ſuperficie piana terminata da una, o più linee, e *figura ſolida* ogni ſolido terminato da una, o più ſuperficie.

DEFINIZIONE XVII.

27. Per *perimetro* d' una figura piana s' intende il ſuo termine intero.

AVVERTIMENTO.

28. I Geometri per eſprimere una figura piana nominano le lettere, che ſtanno nel ſuo perimetro.

DEFINIZIONE XVIII.

29. Una figura piana ſi dice *rettilinea*, ſe il perimetro è compoſto da linee rette; ſi dice *curvilinea*, ſe il perimetro è una linea curva, o compoſto da linee curve; ſi dice finalmente *miſtilinea*, ſe il ſuo perimetro è compoſto da linee rette, e curve inſieme.

Co-

Fig. 6. *Così ABCDE è figura rettilinea ; EFG , ed HIKL ſono figure curvilinee ; ed MNOPQ è figura miſtilinea.*

DEFINIZIONE XIX.

30. D' una figura rettilinea ſi dice *lato* qualunque linea componente il ſuo perimetro ; e ſi dice *baſe* qualunque lato , conſiderato come parte inferiore del perimetro.

DEFINIZIONE XX.

31. Una figura rettilinea ſi dice *trilatera*, se il ſuo perimetro coſta di tre lati ; ſi dice *quadrilatera*, se coſta di quattro ; e finalmente ſi dice *moltilatera* , *o poligona*, se coſta di più di quattro lati.

COROLLARIO.

32. Perchè nelle figure rettilinee tanti ſono gli angoli , quanti ſono i lati ; perciò ſi dicono ancora *triangolo* la figura trilatera, *quadrangolo* la quadrilatera , e *moltangolo* la moltilatera.

DEFINIZIONE XXI.

33. Il triangolo per riſpetto de' lati ſi dice *equilatero* , se tutti e tre i lati ſono uguali ; ſi dice *iſoſcele* , se ſono uguali due ſo-

ſolamente ; e finalmente ſi dice *ſcaleno* , se tutt' i lati ſono diſuguali . Per riſpetto poi degli angoli ſi dice *rettangolo* , se uno degli angoli è retto ; ſi dice *ottuſangolo* , se uno degli angoli è ottuſo , e finalmente ſi dice *acutangolo* , se tutti e tre gli angoli ſono acuti .

Così il triangolo ABC è equilatero , avendo Fig. 7.
tutti e tre i lati AB , BC , CA uguali ; il triangolo DEF è iſocele , avendo uguali i due lati DE , EF ; il triangolo GHI è ſcaleno , avendo diſuguali tutt' i lati ; il triangolo KLM è rettangolo , avendo l' angolo in L retto ; il triangolo NOP è ottuſangolo , avendo l' angolo ottuſo in O ; e finalmente il triangolo QRS è acutangolo , avendo tutt' i tre angoli acuti .

DEFINIZIONE XXII.

34. Nel triangolo rettangolo il lato oppoſto all' angolo retto ſi dice *ipotenuſa* , e gli altri due lati ſi chiamano *cateti* .

Così nel triangolo KLM l' ipotenuſa è KM , ed i cateti ſono KL , LM .

DEFINIZIONE XXIII.

35. Una figura quadrilatera ſi dice *parallelogrammo* , se i lati oppoſti ſono rette parallele ; si dice poi *trapezio* , se i lati oppoſti non ſono rette parallele , o due di eſſe almeno non ſolo tali .

Co-

Fig. 8. *Così ABCD è parallelogrammo, ed EFGH è trapezio.*

DEFINIZIONE XXIV.

36. Un parallelogrammo si dice *quadrato*, se ha tutt' i lati uguali, e tutti gli angoli retti; si dice *rettangolo*, o *quadrilungo*, se ha tutti gli angoli retti, ma non tutt' i lati uguali; si dice *rombo*, se ha tutt' i lati uguali, ma non già gli angoli retti; e finalmente si dice *romboide*, se non ha nè gli angoli retti, nè tutt' i lati uguali.

Fig. 9. *Così ABCD è un quadrato; EFGH è un rettangolo; IKLM è un rombo; ed NOPQ è un romboide.*

DEFINIZIONE XXV.

37. Una figura moltangola si dice *pentagono*, *esagono*, *ettagono*, *ottagono*, *ec.*, secondochè i suoi lati sono cinque, sei, sette, otto, ec., ed ha conseguentemente cinque, sei, sette, otto, ec. angoli.

DEFINIZIONE XXVI.

38. Una figura rettilinea si dice *equilatera*, o *equiangola*, secondochè ha uguali o tutt'i lati, o tutti gli angoli. Si dicono poi due figure rettilinee tra di esse *equilatere*, o *equiangole*, secondochè sono o i lati, o gli

gli angoli d' una rispettivamente uguali ai lati, o agli angoli dell' altra.

DEFINIZIONE XXVII.

39. Per *cerchio*, o *circolo* s' intende una figura piana, ch' è terminata da una linea curva, la quale ritorna in se stessa, e che ha un punto entro di essa tale, che tutte le linee rette, che da sì fatto punto si possono tirare alla detta curva, sono uguali.

DEFINIZIONE XXVIII.

40. La linea curva, che termina il cerchio, si dice *periferia*, o *circonferenza* del cerchio. Il punto, da cui procedono rette uguali alla periferia, si dice *centro* del cerchio. Finalmente le rette uguali procedenti dal centro alla periferia, si dicono *raggi* del cerchio.

Così lo spazio FEG è il cerchio; la linea curva FEG è la periferia; il punto O è il centro; le rette OE, OF, OG, ec. sono i raggi. Fig. 6.

AVVERTIMENTO.

41. Concepiscono i Geometri, per un mero concetto matematico, generarsi il cerchio col muoversi una retta in una superficie piana intorno a un suo estremo fisso, ed immobile, e raggirarsi fino a che ritorni al primiero suo sito.

DE-

DEFINIZIONE XXIX.

42. Si dice *arco* del cerchio qualunque porzione della ſua periferia. La retta, che taglia l' arco, ſi dice *corda* dell' arco. Ogni corda, cha paſſa pel centro, ſi chiama *diametro* del cerchio.

Fig. 10. *Così nel cerchio ABD la porzione AB, o AEDB della periferia ſi dice arco; la retta AB ſi dice corda sì dell' arco AB, che dell' arco AEDB; la corda FC ſi dice diametro.*

COROLLARIO.

43. Eſſendo i raggi metà de' diametri; perciò ſi dicono i raggi anche *mezzi diametri*.

DEFINIZIONE XXX.

44. Si dice *porzione* del cerchio lo ſpazio compreſo tra un' arco, e la ſua corda. La porzione tagliata da un diametro ſi dice *mezzo cerchio*. Lo ſpazio finalmente compreſo da due raggi, e dall' arco, che gli ſteſſi raggi racchiudono, ſi dice *ſettore* del cerchio.

Così lo ſpazio compreſo tra l' arco AB, o AEDB, e la corda AB è porzione del cerchio. Gli ſpazj FABC, FEDC ſono mezzi cerchi. Finalmente lo ſpazio EOD è ſettore del cerchio, come ſettore è altresì lo ſpazio EABDO.

DE-

DEFINIZIONE XXXI.

45. Se la periferia di qualunque cerchio ſi divide in 360 parti uguali, ognuna di eſſe ſi chiama *grado*. Se un grado ſi divide in 60 altre parti uguali, ognuna di eſſe ſi chiama *minuta primo*, o *ſcrupolo primo*. Se un minuto primo ſi divide pure in 60 parti uguali, ognuna di eſſe ſi chiama *minuto ſecondo*, o *ſcrupolo ſecondo*; e così procedendo all' infinito.

POSTULATI.

POSTULATO I.

46. Tirare da un punto ad un' altro su d' un piano una linea retta.

POSTULATO II.

47. Data una linea retta terminata, prolungarla quanto ſi vuole.

POSTULATO III.

48. Dato qualunque punto per centro, e data qualunque linea retta per intervallo, deſcrivere un cerchio.

AV:

AVVERTIMENTO I.

49. Si noti che le operazioni, che diſegnano di fare i due primi poſtulati, eſigono la riga; l' operazioni poi, che diſegna di fare il terzo poſtulato, eſige il compaſſo. E ſi noti altresì che tutte le operazioni, che ſi fanno nella Geometria elementare per iſciorre i probl. s' eſeguiſcono colla riga, e col compaſſo; perchè tutte ſi riducono a tirare, o prolungare linee rette, e a deſcrivere cerchi. Onde que' probl. geometrici, che, per iſciorli, v' è biſogno dell' uſo de' due detti ſtrumenti, appartengono alla Geometria elementare; tutti gli altri poi, che, per iſciorli, v' è biſogno dell' uſo d' altri ſtrumenti, appartengono alla Geometria ſublime.

AVVERTIMENTO II.

50. Si noti pure che se AB, e CD ſono due linee rette diſuguali; deſcrivendo col centro A, eſtremo della retta maggiore AB, e coll' intervallo della retta minore CD l' arco circolare EFG, che interſechi la AB nel punto F; s' avrà della retta maggiore AB la porzione AF uguale alla retta minore CD.

AS-

ASSIOMI.

ASSIOMA I.

51. Le grandezze, che ſono uguali a una terza, ſono uguali tra di eſſe; e di quelle, che ſono uguali tra eſſe, se una è maggiore, o minore d' una terza, le altre ſono anche maggiori, o minori dell' iſteſſa terza.

ASSIOMA II.

52. Se a grandezze uguali s'aggiungono, porzioni uguali, le ſomme, che ſi hanno ſono anche uguali.

ASSIOMA III.

53. Se da grandezze uguali ſi tolgono porzioni uguali, le reſtanti porzioni ſono pure uguali.

ASSIOMA IV.

54. Se a grandezze diſuguali s'aggiungono porzioni uguali, le ſomme, che ſi hanno, ſono anche diſuguali.

ASSIOMA V.

55. Se da grandezze diſuguali ſi tolgono porzioni uguali, le reſtanti porzioni ſono pure diſuguali.

ASSIOMA VI.

56. Le grandezze, che ſono doppie, triple, quadruple, ec., o metà, terze, quarte parti ec. d' una terza, ſono anche tra eſſe uguali.

ASSIOMA VII.

57. Le grandezze, che combaciano inſieme, ſono tra eſſe uguali.

AVVERTIMENTO.

58. Combaciano inſieme due grandezze, se, unita l' una coll' altra, l' una non eſce fuori dell' altra in lunghezza, se ſono linee, in lunghezza, e larghezza, se ſono ſuperficie, e in lunghezza, larghezza, e profondità, se ſono ſolidi.

ASSIOMA VIII.

59. Tutt' una grandezza è ſempre maggiore di qualunque ſua parte; ed è tutt' una gran-

grandezza uguale a tutte le ſue parti inſieme preſe.

ASSIOMA IX.

60. Due linee rette, comunque poſte, non poſſono racchiudere ſpazio alcuno, cioè non poſſono formare alcuna figura geometrica.

ASSIOMA X.

61. Tutti gli angoli retti ſono uguali.

ASSIOMA XI.

62. Di tutte le linee terminate ne' medeſimi punti la linea retta è la più brieve, e addita ella il cammino più brieve, che far ſi poſſa da un punto a un' altro.

COROLLARIO.

63. Eſſendo in ogni triangolo uno de' lati ſempre la linea retta, che tramezza tra due punti, e gli altri due no. Dunque in ogni triangolo ogni lato è ſempre minore della ſomma degli altri due.

ASSIOMA XII.

64. Se una grandezza è il doppio d' un' altra, e una parte di quella è il doppio d'

una parte di queſta ; ſarà la reſtante porzione della prima anche il doppio della reſtante porzione della ſeconda.

LIBRO I.

Delle teoriche fondamentali della Geometria Piana.

CAP. I.

Delle operazioni fondamentali della Geometria Piana.

PROP. I. PROBL. I.

65. *Date tre rette tali , che qualunque di eſſe ſia minore della ſomma delle altre due , coſtruire un triangolo , che abbia i lati riſpettivamente uguali alle tre rette date.*

So-

SOLUZIONE.

Sieno le rette date A , B , C. Fig. 12

1. Si tiri la retta indefinita LN ; e da essa si taglino LP = A , PQ = B , QM = C (§ 50).

2. Co' centri P , e Q , e cogl' intervalli PL , QM si descrivano i cerchi LRT , MRV (§ 48) , li quali s' intersecano colle periferie nel punto R.

3. Dal punto R agli punti P , e Q si tirino le rette RP , RQ (§ 46).

Dico essere PQR il triangolo cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo i punti P , e Q centri de' cerchi LRT , MRV ; saranno PR = PL , e QR = QM (§ 39). Ma sono per la costruzione PL = A , PQ = B , QM = C. Dunque RP = A , PQ, = B , QR = C. Sicchè s' è descritto il triangolo PQR cercato. Ch' è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

COROLLARIO.

66. Se le tre rette LP , PQ , QM saranno uguali , il triangolo PQR sarà equilatero. Se poi saranno uguali solamente PL, QM , l' istesso triangolo PQR sarà isoscele

(§ 33). Sicchè si costruisce su d'una retta data PQ un triangolo equilatero, se prima si descrivano due cerchi LRT, MRV co' centri P, e Q, e coll'istesso intervallo PQ (§48); e poscia dal punto R, in cui s' intersecano le periferie de' cerchi descritti, agli punti P, e Q si tirano le rette RP, RQ (§ 46).

PROP. II. PROBL. II.

67. Dato un punto in una retta, e dato un' angolo rettilineo, formare nel dato punto un' altr' angolo uguale all' angolo dato.

SOLUZIONE.

Fig. 13. Sia dato il punto A nella retta AB, e sia dato l'angolo OMP.

1. Presi ne' lati MO, MP due punti ad arbitrio L, e N, s'uniscano colla retta LN.

2. Si prolunghi AB per quanto bisogna verso D, e F (§ 47); e si taglino AD = MN, AB = LM, e BE = LN (§ 50).

3. Presi i punti A, e B per centri, e cogl'intervalli AD, BE si descrivano i cerchi DCG, ECH (§ 48), li quali colle periferie s' intersecano nel punto C.

4. Finalmente dal punto A al punto C si tiri la retta AC (§ 46).

Dico essere BAC l'angolo cercato.

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Essendo congiunta la retta BC, il lato AB = LM, il lato AC = AD (§ 39), e perciò uguale a MN, e la base BC = BE, e conseguentemente uguale alla base LN; sarà l'angolo BAC uguale all'angolo LMN (§ 19). Per la qual cosa nel dato punto A s'è fatto l'angolo BAC uguale al dato OMP. Ch'è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

PROP. III. PROBL. III.

68. Dato qualunque angolo rettilineo, dividerlo in due parti uguali.

SOLUZIONE.

Sia ABC l'angolo dato, Fig. 14

1. Si prenda nel lato AB ad arbitrio il punto D; e dal lato BC si tagli BE = BD (§ 50); e si congiunga DE.

2. Su DE si faccia il triangolo equilatero DFE (§ 66).

3. Finalmente dal punto B al punto F si tiri la retta BF (§ 46).

Dico che BF divide l'angolo ABC in due parti uguali ABF, FBC.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo il lato BD = BE per la costruzione, il lato EF comune, e la base DF = FE, come lati del triangolo equilatero DFE; sarà l' angolo DBF uguale all' angolo EBF (§ 19). Per la qual cosa s' è diviso l' angolo ABC in due parti uguali. Ch'è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

COROLLARIO.

69. Se dell' istesso modo si divideranno successivamente in due parti uguali prima le metà dell' angolo ABC, poscia le quarte parti, indi le parti ottave, ec.; s' avrà l' angolo ABC diviso in 4. 8, 16, ec. parti uguali. Sicchè ogni angolo rettilineo colla riga, e col compasso si può dividere in 2, 4, 8, 16, 32, 64, ec. parti uguali.

AVVERTIMENTO.

70. Si noti che i problemi delle divisioni degli angoli rettilinei in tante parti uguali, quante ne disegnano i numeri, che tramezzano tra 2, 4, 8, 16, 32, 64, ec., appartengono alla Geom. sublime, e nella elementare sono impossibili; perchè esigono operazioni, che non si possono eseguire colla riga, e col compasso. L' angolo retto però

rò è divisibile nella Geo. elementare e in 3, e in 5 parti uguali, come si vedrà a suo luogo; e due altri angoli, che si diranno pure a suo luogo, sono divisibili nella Geo. elementare, uno in tre parti uguali, e l'altro in cinque.

PROP. IV. PROBL. IV.

71. *Data qualunque linea retta terminata, dividerla in due parti uguali.*

SOLUZIONE.

Sia AB la retta data. Fig. 15

1. Si faccia su AB il triangolo equilatero ABC (§ *66*).

2. Si divida l' angolo ACB in due parti uguali colla retta CD (§ *68*).

Dico essere AB divisa nel punto D in due parti uguali.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè gli angoli ACD, BCD sono uguali per la costruzione, e hanno il lato AC = BC, e'l lato CD comune. Dunque uguali sono anche le basi AD, DB (§ 19). E perciò s' è divisa la retta AB in due parti uguali in D. Ch' è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

CAP.

CAP. II.

Della teorica delle linee rette perpendicolari, e obblique ad altre.

PROP. V. PROBL. V.

72. *Dato un punto in una linea retta, innalzare dal punto dato un' altra retta perpendicolare alla data.*

SOLUZIONE.

Fig.16. Sia dato il punto C nella retta AB.

1. Si prenda in CA il punto D ad arbitrio, e da CB si tagli CE = CD (§ 50).

2. Si faccia su DE il triangolo equilatero DOE (§ *66*); e dal punto O al punto C si tiri la retta OC (§ *46*).

Dico essere OC la perpendicolare cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo il lato CD = EC, il lato OC comune, e la base OD = OE, saranno gli angoli OCD, OCE uguali (§ *19*); e perciò OC è perpendicolare ad AB (§ 20). Per la qual cosa dal dato punto C s' è innal-

nalzata la CO perpendicolare ad AB. Ch' è ciò, che biſognava fare, e dimoſtrare.

PROP. VI. PROBL. VI.

73. *Data una retta, e dato un punto fuori della ſua direzione, calare dal punto dato una perpendicolare alla retta data.*

SOLUZIONE.

Sieno AB la retta data, e O il punto dato.

1. Si prenda ad arbitrio il punto F, che ſtia per riſpetto del punto O dall' altra banda della retta AB; e ſi congiunga OF (§ 46).

2. Si deſcriva col centro O, e coll'intervallo OF l' arco circolare DFE (§ 48), che interſeca AB ne' punti D, e E.

3. Si divida DE in due parti uguali in C (§ 71), e ſi congiunga OC.

Dico eſſere OC la perpendicolare cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo, congiunte le rette OD, OE, il lato CD = CE per la coſtruzione, il lato OC comune, e la baſe OD = OE (§ 39); ſaranno gli angoli OCD, OCE uguali (§ 19). E perciò OC è perpendicolare ad AB (§ 20). Per la qual coſa dal dato punto O s'è

O s'è calata OC perpendicolare ad AB. Ch' è ciò, che biſognava fare, e dimoſtrare.

PROP. VII. TEOR. I.

74. *Se una retta cade su d'un' altra, forma ella gli angoli conſeguenti o retti, o inſieme preſi uguali a due retti.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 3. In due modi ſulla retta CD può caderne un' altra, o perpendicolarmente, come AB, o obbliquamente, come EB. Nel primo caſo è chiaro eſſere gli angoli ABC, ABD uguali (§ 20), e per conſeguenza retti (§ 21). Nell' altro caſo perchè l'angolo EBC è maggiore del retto ABC di quant' è l'angolo ABE, e l' angolo EBD è minore del retto ABD di quant' è pure ABE. Dunque, coll' eccesſo di uno ſul retto compenſando la mancanza dell' altro anche dal retto, ſarà la ſomma degli angoli conſeguenti EBC, EBD uguale a due retti. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

Fig. 17 75. Quindi se in un punto, come O, s'uniſcano quante rette ſi ſieno OA, OB, OC, OD, OE, OF, OG; perchè, prolungata AO in H, è uguale a due retti sì la ſomma

ma degli angoli AOB, BOC, COD, DOH, che la ſomma degli angoli HOE, EOF, FOG, GOA; ſarà la ſomma di tutti gli angoli AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOG, GOA, dalle ſudette rette nel punto O formati, uguale a quattro retti.

PROP. VIII. TEOR. II.

76. Se due rette s'interſecano, gli angoli verticali, che fanno, ſono tra eſſi uguali.

DIMOSTRAZIONE.

S'interſechino AB, e CD in O. Eſſendo a due retti uguale sì la ſomma degli angoli AOC, AOD, che la ſomma degli angoli AOC, COB (§ 74); ſarà la ſomma di AOC, AOD uguale alla ſomma di AOC, COB (§ 51). Onde, toltone il comune AOC, ſarà l'angolo AOD uguale al ſuo verticale COB (§ 53). Similmente ſi dimoſtra eſſere uguali i verticali AOC, DOB. Sicchè se due rette, ec. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare. Fig. 4.

PROP. IX. TEOR. III.

77. Se dall'eſtremo B della retta BE ſieno tirate per direzioni oppoſte due altre rette BC, BD in modo, che la ſomma degli angoli EBC, EBD ſia uguale a due retti; forme- Fig. 3.

meranno CB, BD una retta continuata.

DIMOSTRAZIONE.

S' intenda CB prolungata a deſtra ; ſarà l' angolo EBC , una col ſuo conſeguente, uguale a due retti (§ 74); e perciò uguale alla ſomma di EBC, EBD . Onde , toltone il comune EBC , ſarà il conſeguente di EBC uguale a EBD (§ 53) . Sicchè BD combacia con CB prolungata ; e conſeguentemente CB , BD formano una retta continuata . Ch' è ciò , che biſognava dimoſtrare.

PROP. X. TEOR. IV.

Fig. 4. 78. *Se da qualunque punto O della retta AB ſieno tirate per direzioni oppoſte due altre rette OC, OD in modo, che gli angoli COB, AOD ſieno uguali ; formeranno CO, OD pure una retta continuata.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè , aggiugnendo agli angoli uguali AOD, COB il comune AOC, la ſomma di AOD , AOC uguaglierà la ſomma di AOC, COB (§ 52) . Ma la ſomma di AOC , COB uguaglia due retti (§ 74) . Dunque la ſomma di AOD , AOC anche uguaglia due retti (§ 51) . E perciò CO, OD formano una retta continuata (§ 77).

Ch'

Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

CAP. III.

Della teorica delle linee rette parallele.

DEFINIZIONE.

79. Sieno le rette AB, CD esistenti nel medesimo piano, e tagliate comunque da un' altra retta EH. Si diranno *angoli alterni* sì i due AFG, FGD, che i due BFG, FGC. Si dirà *angolo esterno* ciascuno degli quattro EFB, EFA, HGC, HGD. Si diranno rispettivamente FGD, FGC, GFA, GFB *angoli interni opposti* per riguardo degli esterni EFB, EFA, HGC, HGD. Finalmente si diranno *angoli interni posti dall' istessa parte* sì i due BFG, FGD, che i due AFG, FGC. Fig. 18

PROP. IX. TEOR. V.

80. *Se due rette AB, CD, esistenti nel medesimo piano, vengono tagliate da un' altra EH, e formano gli angoli interni posti dall' istessa parte BFG, FGD uguali a due retti, sono tali rette AB, CD parellele.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Se si niega essere AB, CD parallele, prolungate s' uniranno. S' uniscano, s' è possibile, nel punto O. Si prolunghi GC in I, finche sia GI = FO, e s' unisca IF. Essendo uguale a due retti si la somma degli angoli BFG, FGD, che la somma di FGD, FGC (§ 74); sarà la somma di BFG, FGD uguale alla somma di FGD, FGC (§ 51). Onde, toltone il comune FGD, sarà OFG uguale a FGI (§ 53). Essendo dunque gli angoli OFG, IGF uguali tra essi, e avendo il lato OF = IG, e 'l lato FG comune, sarà la base GO = FI (§ 19). Perciò nel triangolo IFO la somma de' lati OF, FI è uguale alla somma delle rette IG, GO, o sia al terzo lato IO. Ma ciò è impossibile (§ 63). Dunque è impossibile che AB, CD non sieno parallele. Per la qual cosa se due rette, ec.. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

81. Sebbene AB girando intorno al punto F possa ricevere infinite diverse posizioni; pure non ha AB se non se una sola posizione, nella quale è ella parallela a CD, come chiaramente si comprende per la nozione delle parallele. Ma AB è parallela a CD,

CD, quando ha tale posizione, che la somma degli angoli BFG, FGD sia uguale a due retti. Dunque AB non è parallela a CD, se la posizione di AB è tale, che la somma degli angoli BFG, FGD sia maggiore, o minore di due retti.

PROP. XII. TEOR. VI.

82. *Se due rette AB, CD, esistenti nel medesimo piano, vengono tagliate da un'altra retta EH, e formano gli angoli alterni uguali tra essi, o l'angolo esterno uguale al suo interno opposto; sono tali rette AB, CD tra esse parallele.*

DIMOTRAZIONE.

I. Sieno uguali gli alterni AFG, FGD. Sarà la somma de' due angoli BFG, FGD uguale alla somma di AFG, BFG (§ 52), cioè uguale a due retti (§ 74). Sicchè AB, CD sono parallele (§ 80).

II. Sia l'angolo esterno EFB uguale al suo interno opposto FGD. Sarà la somma di BFG, FGD uguale alla somma di EFB, BFG (§ 52), cioè uguale a due retti (§ 74). Onde AB, CD sono parallele (§ 80). Sicchè se due rette, ec. Ch' è quanto bisognava dimostrare.

PROP. XIII. TEOR. VII.

83. *Se due rette parallele vengono tagliate comunque da un' altra retta; 1. la*

ſomma degli angoli interni poſti dall' iſteſſa parte è uguale a due retti ; 2. gli angoli alterni ſono tra eſſi uguali ; e 3. l' angolo eſterno è uguale al ſuo interno oppoſto.

DIMOSTRAZIONE.

Sieno AB, CD parallele, e ſieno comunque tagliate da EH.

I. Se la ſomma degli angoli BFG, FGD non è uguale a due retti, ſarà eſſa maggiore, o minore di due retti. Onde AB, CD non ſono parallele (§ 81). Ma ciò ripugna all' ipoteſi. Dunque la ſomma degli angoli BFG, FGD è uguale a due retti.

II. La ſomma degli angoli AFG, BFG è uguale a due retti (§ 74); e perciò uguale alla ſomma di BFG, FGD. Onde, toltone il comune BFG, l' angolo AFG è uguale al ſuo alterno FGD (§ 53).

III. L' angolo eſterno EFB è uguale ad AFG (§ 76); e perciò uguale al ſuo interno oppoſto FGD. Sicchè ſe due rette parallele, ec., Ch' è quanto biſognava dimoſtrare.

PROP. XIV. TEOR. VIII.

84. *Se due rette ſono parallele ad una terza, ſono anche tra eſſe parallele.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 19. Sieno AB, CD ambedue perallele ad EF. Si tiri GI con qualunque inclinazione. Saranno

ranno l' angolo AGH uguale al ſuo alterno HIF, e l' angolo eſterno GHD uguale al ſuo interno oppoſto HIF (§ *prec.*). Dunque gli angoli alterni AGH, GHD ſono tra eſſi uguali (§ 51). E perciò AB, CD ſono parallele (§ 82). Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XV. TEOR. IX.

85. *Se due rette AD, BC ſono uguali, e parallele, e vengono congiunte dall' iſteſſa parte dalle rette AB, DC; tali rette AB, DC ſono pure uguali, e parallele.* Fig. 8.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, congiunta BD, gli angoli ADB, CBD, per le parallele AD, BC sono uguali (§ 83), e hanno il lato AD = BC per l' ipoteſi, e 'l lato BD comune. Dunque uguali ſono pure le baſi AB, CD (§ 19). In oltre ſono il lato AB = DC, il lato AD = CB, e la baſe BD è comune. Sicchè uguali ſono gli angoli BAD, BCD (§ 19); e perciò la ſomma degli angoli BAD, ADC è uguale alla ſomma degli angoli BCD, CDA (§ 52), e conſeguentemente uguale a due retti (§ 83). Onde AB, DC ſono anche parallele (§ 80). Ch'è quanto biſognava dimoſtrare.

PROP. XVI. PROBL. VII.

86. *Data una linea retta, e dato un*

punto fuori della sua direzione, tirare pel punto dato un' altra retta parallela alla retta data.

SOLUZIONE.

Fig.20 Sia AB la retta data, e sia O il punto dato.

1. Si prenda in AB ad arbitrio il punto P, e si congiunga la retta OP (§ 46).

2. Si faccia nel punto O l' angolo POC uguale all' angolo OPB (§ 67); e si prolunghi CO verso D (§ 47).

Dico essere CD la parallela cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè per la costruzione gli angoli alterni COP, OPB sono uguali. Dunque CD è parallela ad AB (§ 82). Onde pel dato punto O s' è tirata la CD parallela ad AB. Ch' è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

CAP. IV.

Delle proprietà de' triangoli e per rispetto degli angoli, e per rispetto de' lati.

DEFINIZIONE.

Fig.21 87. Rappresenti ABG qualunque triangolo, e 'l lato AC si prolunghi verso D. Si dirà

dirà BCD *angolo esterno*, CBA, CAB si diranno i suoi *angoli interni opposti*.

PROP. XVII. TEOR. X.

88. *In ogni triangolo, se si prolunga un lato, l'angolo esterno è uguale alla somma delli due interni opposti, e tutti e tre gli angoli insieme presi sono uguali a due retti.*

DIMOSTRAZIONE.

Rappresenti ABC qualunque triangolo. Si prolunghi AC verso D; e pel punto C si tiri CE parallela ad AB (§ 86).

I. Essendo l'angolo in A uguale a DCE, e l'angolo in B uguale a BCE (§ 83). Sarà la somma degli angoli in A, e B uguale alla somma di DCE, ECB, o sia all'angolo esterno BCD.

II. Essendo la somma degli angoli in A, e B uguale all'angolo BCD; aggiuntovi di comune l'angolo BCA, sarà la somma di CAB, ABC, BCA uguale alla somma di BCD, BCA) § 52), o sia a due retti (§ 74). Sicche in ogni triangolo, ec. Ch'è quanto bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

89. Quindi si ricavano I. che ogni angolo esterno di qualunque triangolo è maggio-

re ſempre di ciaſcuno de' ſuoi interni oppoſti: II. che due angoli qualunque d'un triangolo, inſieme preſi, ſono ſempre minori di due angoli retti; e perciò un triangolo non può avere nè più d'un'angolo retto, nè più d'un'angolo ottuſo: e conſeguentemente da un punto non ſi può innalzare, o calare su d'una retta, se non se una ſola perpendicolare: III. che se la ſomma di due angoli d'un triangolo uguaglia la ſomma di due angoli d'un' altro triangolo, gli angoli rimanenti ſaranno tra eſſi uguali.

AVVERTIMENTO.

Fig. 6. 90. Rappreſenti ABCDE qualunque figura rettilinea; e, preſo entro di eſſa ad arbitrio il punto O, ſi congingano le rette OA, OB, OC, OD, OE. Saranno tutti gli angoli de' triangoli AOB, BOC, COD, DOE, EOA, cioè tutti gli angoli della figura, una cogli angoli formati nel punto O, o una con quattro retti (§ 75) uguali a tanti retti, quanti ne diſegna il doppio del numero de' lati dell'iſteſſa figura ABCDE. Dunque se dalla ſomma di tanti retti, quanti ne diſegna il doppio del numero de' lati d'una figura rettilinea, se ne tolgono quattro angoli retti, la ſomma de' retti reſtanti dà la ſomma di tutti gli angoli della figura.

PROP.

PROP. XVIII. TEOR. XI.

91. *Se in un triangolo due lati ſono uguali, gli angoli oppoſti a tali lati ſono anche uguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Abbia il triangolo ABC il lato AB = BC. Fig. 22
Avendo i due angoli BAC, BCA il lato AB = BC, il lato AC comune, e le baſe BC = BA; ſaranno tali angoli BAC, BCA tra eſſi uguali [§ 19). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

92. Quindi, se un triangolo è equilatero, è anche equiangolo. E quindi ancora in ogni triangolo iſoſcele ABC la retta BD, se divide in due parti uguali ABD, DBC l' angolo ABC, divide in due parti uguali AD, DC anche la baſe AC; ed all' oppoſto, se divide in due parti uguali la baſe AC, divide pure in due parti uguali l' angolo ABC. Perchè avendo gli angoli ABD, DBC il lato AB = BC, e 'l lato BD comune; qualora l' angolo ABD è uguale a DBC, ſarà AD = DC, e qualora è AD = DC, ſarà l' angolo ABD uguale all' angolo DBC. Le medeſime conſeguenze hanno luo-

go per riſpetto d' ogni angolo ne' triangoli equilateri.

PROP. XIX. TEOR. XII.

93. Se in un triangolo due angoli ſono uguali, i lati oppoſti a tali angoli ſono anche tra eſſi uguali.

DIMOSTRAZIONE.

Abbia il triangolo ABC gli angoli BAC BCA uguali. Se ſi niega eſſere AB = BC, ſarà AB maggiore, o minore di BC. Sia, s'è poſſibile, AB maggiore di BC. S'intenda tagliata BE = BC, e ſi congiunga CE. Eſſendo del triangolo CAE il lato AE prolungato in B, ſarà l'angolo BEC maggiore di CAE, (§ 89); e perciò maggiore di ACB, e molto più maggiore di BCE. Sicchè nel triangolo EBC a' lati uguali BE, BC non ſono oppoſti angoli uguali. Ma ciò ripugna (§ 91). Dunque ripugna che ſia AB maggiore di BC. Similmente ſi dimoſtra che AB non è minore di BC. Dunque è AB = BC. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

CO-

COROLLARIO.

94. Quindi, se un triangolo è equiangolo, è anche equilatero.

PROP. XX. TEOR. XIII.

95. *Se in un triangolo un lato è maggiore d' un' altro, l' angolo oppoſto al lato maggiore è anche maggiore dell' angolo oppoſto al lato minore.*

DIMOSTRAZIONE.

Abbia il triangolo ABC il lato AC maggiore di AB. Si tagli AD = AB, e ſi congiunga BD. Eſſendo AB = AD, ſarà l' angolo ADB = ABD (§ 91). Ma l' angolo ABC è maggiore di ABD (§ 59). Dunque ABC è maggiore ancora di ADB (§ 51). E' in oltre ADB maggiore dell' angolo in C (§ 89). Sicchè l' angolo ABC è molto più maggiore di ACB. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare. Fig. 23

PROP.

PROP. XXI. TEOR. XIV.

96. Se in un triangolo un' angolo è maggiore d' un' altro, il lato opposto all' angolo maggiore è anche maggiore dal lato opposto all' angolo minore.

DIMOSTRAZIONE.

Abbia il triangolo ABC l' angolo ABC maggiore dell' angolo ACB. Se AC non è maggiore di AB, sarà AC o uguale, o minore di AB. Dunque l' angolo ABC sarà o uguale ad ACB (§ 91), o minore di ACB (§ *prec.*). Ma ambedue tali cose ripugnano all' ipotesi. Sicchè ripugna che AC non sia maggiore di AB. Per la qual cosa se in un triangolo, ec.. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

97. Quindi di tutte le rette, che da un punto su d' un' altra retta tirar si possono, la perpendicolare è la minima.

CAP. V.

Della perfetta uguaglianza de' triangoli.

PROP. XXII. TEOR. XV.

98. *Se due triangoli ABC, DEF hanno il lato AB = DE il lato BC = EF, e l'angolo ABC uguale a DEF; avranno la baſe AC = DF, l'angolo in A uguale all'angolo in D, e l'angolo in C uguale all'angolo in F, e ſarà il triangolo ABC uguale al triangolo DEF.* Fig. 2.

DIMOSTRAZIONE.

S' intenda il triangolo ABC poſto ſul triangolo DEF in modo, che caſchino il punto B ſul punto E, e 'l lato BA ſul lato ED. Eſſendo l'angolo ABC uguale all'angolo DEF per l'ipoteſi, caſcherà anche il lato BC su EF. Ed eſſendo AB = DE, e BC = EF, caſcheranno pure il punto A ſul punto D, e 'l punto C ſul punto F. Dunque combaciano la baſe AC con DF, l'angolo in A coll'angolo in D, l'angolo in C coll'angolo in F, e 'l triangolo ABC col

col triangolo DEF . Ma le grandezze, che combaciano, ſono uguali (§ 57) . Sicchè ſono la baſe AC = DF , l' angolo in A uguale all' angolo in D, l'angolo in C uguale all' angolo in E , e 'l triangolo A B C uguale al triangolo DEF . Ch' è ciò , che biſognava dimoſtrare .

PROP. XXIII. TEOR. XVI.

99. *Se due triangoli ABC, DEF, hanno il lato AB = DE , BC = EF , e la baſe AC = DF ; ſaranno tali triangoli equiangoli , ed uguali .*

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo il lato AB=DE, il lato BC=EF, e la baſe AC = DF; ſarà l'angolo ABC uguale all'angolo DEF (§ 19) ; e conſeguentemente per la precedente ſaranno l' angolo in A uguale all' angolo in D , l' angolo in C uguale all' angolo in F , e 'l triangolo ABC uguale al triangolo DEF . Ch' è ciò , che biſognava dimoſtrare .

PROP. XXIV. TEOR. XVII.

100. *Se due triangoli ſono tra eſſi equiangoli , e hanno due lati oppoſti ad angoli uguali tra eſſi uguali , ſono anche tali triangoli tra eſſi equilateri , ed uguali .*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Sieno ne' triangoli ABC, DEF gli angoli in A, B, C rispettivamente uguali agli angoli in D, E, F, e sieno uguali i lati AC, DF opposti ad angoli uguali in B, ed E. S'intenda il triangolo ABC posto sul triangolo DEF in modo, che AC combaci con DF. Essendo gli angoli in A, e D uguali, cascherà AB su DE: e cascherà in oltre il punto B sul punto E; altrimenti CB s' unirebbe con AB o sotto, o sopra il punto E; e così l' angolo BCA sarebbe minore, o maggiore di EFD. Ora ciò è contro l' ipotesi. Dunque il punto B casca sul punto E. E perciò combaciano insieme il lato AB con DE, il lato BC con EF, e 'l triangolo ABC col triangolo DEF. Onde sono AB = DE, BC = EF, e 'l triangolo ABC uguale al triangolo DEF (§ 57). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XXV. TEOR. XVIII.

101. *Se due triangoli ABC, DEF hanno AB = DE, BC = EF, gli angoli in A, e D uguali tra essi, e gli angoli in C, ed F della medesima specie, cioè ambidue ottusi, o acuti; sono tali triangoli uguali tra essi, e hanno gli angoli in B, e C rispettivamente uguali agli angoli in E, ed F, e la base AC = DF.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Se ſi niega eſſere l' angolo ABC uguale all' angolo DEF, ſarà quello maggiore, o minore di queſto. Sia, s' è poſſibile, ABC maggiore di DEF. S' intenda in B fatto l'angolo ABG uguale a DEF. Eſſendo i due triangoli ABG, DEF equiangoli, ed eſſendo AB = DE; ſarà BG = EF (§ 100), e perciò uguale a BC. Onde l'angolo BGC è uguale a BCG (§ 91). Ma gli angoli in C, ed F ſono della medeſima ſpezie per l' ipoteſi. Dunque anche gli uguali ad eſſi BGA, BGC ſono della medeſima ſpezie, cioè ambidue ottuſi, o acuti. Ma ciò è impoſſibile. Dunque è impoſſibile che l' angolo ABC ſia maggiore dell' angolo DEF. Similmente ſi dimoſtra che ABC non è minore di DEF. Sicchè gli angoli ADC, DEF ſono uguali, e conſeguentemente uguali anche BCA, EFD (§ 89). Per la qual coſa, eſſendo i triangoli ABC, DEF equiangoli, e avendo AB = DE; ſaranno pure AC = DF, e 'l triangolo ABC uguale al triangolo DEF (§ 100). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

CAP.

CAP. VI.

Delle proprietà fondamentali de' parallelogrammi, e della ſemplice uguaglianza sì de' parallelogrammi, che de' triangoli.

DEFINIZIONE I.

102. Si dice *diagonale*, o *diametro* d'un parallelogrammo la retta, che cogiugne i vertici di due de' ſuoi angoli oppoſti.

Così del parollelogrammo ABCD la retta AC è diagonale, Fig. 24

DEFINIZIONE II.

103. Se nella diagonale AC di qualunque parallelogrammo ABCD ſi prenda ad arbitrio il punto O, e per tal punto ſi tirino le rette EF, GH riſpettivamente parallele a' corriſpondenti lati del parallelogrammo; ſi dividerà eſſo in quattro parallelogrammi AEOG, EBHO, OHCF, OFDG, de' quali i due AEOG, OHCF ſi diranno *i parallelogrammi, che ſtanno intorno la diagonale*, e gli altri due EBHO, OFDG ſi diranno *i ſupplimenti di quelli, che*

che ſtanno intorno la diagonale.

PROP. XXVI. TEOR. XIX.

104. *In ogni parallelogrammo ſono uguali tra eſſi sì i lati oppoſti, che gli angoli oppoſti; e la diagonale il divide in due triangoli uguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Rappreſenti ABCD qualunque parallelogrammo, e in eſſo ſi tiri la diagonale AC. Eſſendo parallele AB a DC, e AD a BC (§ 35); ſaranno l' angolo BAC uguale a DCA, e l'angolo DAC uguale a BCA (§ 83). Onde gli angoli oppoſti BAD, BCD ſono tra eſſi uguali; ed uguali ſono anche gli oppoſti ABC, ADC (§ 89). Eſſendo in oltre i triangoli ABC, CDA equiangoli tra eſſi, ed avendo il lato AC comune; ſarannp il triangolo ABC = CDA, il lato AB = DC, e 'l lato AD = BC (§ 100). Sicchè in ogni parallelogrammo, ec.. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO I.

105. Eſſendo i due angoli BAD, ADC uguali a due retti (§ 83); se BAD è retto, anche ADC è retto; e conſeguentemente retti ſono anche gli oppoſti in C, e B. Dunque se un' an-

angolo d' un parallelogrammo è retto, tutti gli altri ſono anche retti.

COROLLARIO II.

106. In oltre, eſſendo BC = AD, AB = DC, se è AD = DC, il parallelogrammo è equilatero.

PROP. XXVII. TEOR. XX.

107. *I ſupplimenti EBHO, OFDG de' parallelogrammi, che ſono intorno la diagonale d' un' altro parallelogrammo ABCD, ſono tra eſſi uguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Venendo ogni parallelogrammo diviſo da una ſua diagonale in due triangoli uguali (§ 104); ſaranno i tre triangoli ABC AEO, OHC riſpettivamente uguali a' tre ADC, AGO, OFC. Sicchè, togliendo da ABC i due AEO, OHC, e da ADC i due AGO, OFC, reſteranno i ſupplimenti EBHO, OFDG uguali tra eſſi (§ 53). Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XXVIII. TEOR. XXI.

108. *I parallelogrammi ABCD, ABFE,* Fig. 25 *ed i triangoli ABD, ABE, che hanno la*

medeſima baſe AB, e che ſono racchiuſi tra le iſteſſe rette parallele DP, AE, ſono uguali tra eſſi.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo ad AB uguale sì DC, che EF (§ 104), ſarà DC = EF (§ 51); onde, aggiungnendovi di comune CE, ſarà DE = CF (§ 52). Sono in oltre AD = BC, ed AE = BF. Dunque i triangoli ADE, BCF ſono uguali (§ 99); e perciò, toltone il comune triangolo COE, uguali ſaranno pure i reſtanti trapezj ADCO, EOBF (§ 53. Per la qual coſa, aggiungendo a sì fatti trapezj di comune il triangolo ABO, uguali faranno i parallelogrammi ABCD, ABFE (§ 52); e conſeguentemente uguali anche le metà di eſſi, o ſieno i triangoli ABD, ABE. Ch' è quanto biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

109. Eſſendo il parallelogrammo ABCD il doppio del triangolo ABD (§ 114), e 'l triangolo ABD = ABE; ſarà il parallelogrammo ABCD il doppio anche del triangolo ABE. Sicchè se un parallelogrammo, e un triangolo hanno l' iſteſſa baſe, e ſono racchiuſi tra le medeſime parallele, il parallelogrammo è il doppio del triangolo.

PROP.

PROP. XXIX. TEOR. XXII.

110. *I parallelogrammi ABCD, EFGH, ed i triangoli ABD, EFG, che hanno le baſi AB, EF uguali, e che ſono racchiuſi tra le medeſime parallele AF, DG, ſono uguali tra eſſi.* Fig. 26

DIMOSTRAZIONE.

Si congiungano le rette DE, CF. Eſſendo ad AB uguale sì DC, che EF; ſarà DC = EF (§ 51). Sono di più DC, EF parallele. Dunque DE, CF ſono pure parallele (§ 85); e perciò la figura DEFC è un parallelogrammo (§ 35). In oltre al parallelogrammo DEFC è uguale sì il parallelogrammo ABCD per la baſe comune DC, che 'l parallelogrammo EFGH per la baſe comune EF, e per eſſere tutti e tre tra le medeſime parallele AF, DG (§ 108). Dunque i parallelogrammi ABCD, EFGH ſono tra eſſi uguali (§ 51); e conſeguentemente uguali anche le metà di eſſi, o ſieno i triangoli ABD, EFG. Ch' è quanto biſognava dimoſtrare.

PROP. XXX. TROR. XXIII.

111. *Se due triangoli ABC, ABD ſono uguali, hanno l' iſteſſa baſe AB, e ſono ſituati dalla medeſima parte per riſpetto del-* Fig. 27

la baſe AB ; la retta CD, che uniſce i vertici C , e D di tali triangoli , è parallela alla baſe AB.

DIMOSTRAZIONE.

Se ſi niega eſſere CD parallela ad AB ; ſi potrà pel punto C tirare un' altra retta parallela ad AB . Si tiri , s' è poſſibile , CO parallela ad AB , e ſi congiunga BO . Sarà il triangolo AOB uguale al triangolo ABC (§ 108). Ma ABC è per l' ipoteſi uguale ad ABD . Dunque la parte ABO è uguale al tutto ABD (§ 51) . Sicchè , eſſendo ciò impoſſibile (§ 59) , impoſſibile è pure che CD non ſia parallela ad AB . Per la qual coſa se due triangoli , ec. . Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XXXI. TEOR. XXIV.

Fig.28 112. *Se due triangoli ABC , DEF ſono uguali , hanno le baſi uguali AB , DE poſte nell' iſteſſa retta AE , e ſono ſituati dall' iſteſſa parte per riſpetto di AE ; la retta CF , che uniſce i vertici C , ed F di tali triangoli , è parallela ad AE.*

DIMOSTRAZIONE.

Se ſi niega eſſere CF parallela ad AE ; ſi potrà pel punto C tirare un' altra retta pa-

parallela ad AE. Si tiri, s'è poſſibile, CO parallela ad AE, e ſi congiunga EO. Sarà il triangolo DOE uguale ad ACB (§ 110). Ma ACB per l' ipoteſi è uguale a DEF. Dunque la parte DOE è anche uguale al tutto DFE (§ 51). Sicchè, eſſendo ciò impoſſibile, impoſſibile è ancora che CF non ſia parallela ad AE. Per la qual coſa se due triangoli, ec. : Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

CAP. VII.

Della teorica de' rettangoli, e quadrati.

DEFINIZIONE.

113. Un quadrato ſi dice *formato ſu d'una data retta*, se eſſa è ſuo lato. Si dice poi un rettangolo *formato da due date rette*, se tali rette formano uno de' ſuoi angoli.

AVVERTIMENTO.

114. Il quadrato ſi dice formato su d' una retta, perchè una retta ſola baſta per la ſua formazione. Il rettangolo poi ſi dice formato da due rette, perchè di due rette v' è biſogno per la formazione di eſſo, una

per dinotare la ſua lunghezza, e l'altra per dinotare la ſua larghezza.

PROP. XXXII. PROBL. VIII.

115. *Data una retta terminata, formare ſu di eſſa il quadrato.*

SOLUZIONE.

Fig. 29 Sia AB la retta data.

1. S'innalzi dal punto A su AB la perpendicolare AE (§ 72); e da eſſa ſi tagli AD = AB (§ 50).

2. Per gli punti B, e D ſi tirino BC, DC riſpettivamente parallele ad AD, AB (§ 86), che s'uniſcano in C.

Dico eſſere ABCD il quadrato cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè per la coſtruzione ABCD è un parallelogrammo, ed ha il lato AD = AB, e l'angolo in A retto; onde è equilatero, e rettangolo (§§ 105, e 106), e conſeguentemente è un quadrato (§ 36). Sicchè ſulla retta data AB s'è formato il quadrato ABCD. Ch' è ciò, che biſognava fare, e dimoſtrare.

CO-

COROLLARIO.

116. Essendo in ogni quadrato uguali tutt' i lati, e retti tutti gli angoli; è facile l' intendere che debbono combaciare e i quadrati fatti su rette uguali, ed i quadrati, che sono uguali tra essi. E perciò i quadrati formati su rette uguali sono uguali tra essi; e quelli, che sono tra essi uguali, sono fatti su rette uguali.

PROP. XXXIII. PROBL. IX.

117. *Date due rette disuguali, costruire un rettangolo, che sia da tali rette formato.*

SOLUZIONE.

Sieno le rette date AB, ed L. Fig. 30

1. Dal punto A s' innalzi su AB la perpendicolare AE (§ 72); e da essa si tagli AD = L (§ 50).

2. Per gli punti D, e B si tirino DC, BC rispettivamente parallele ad AB, AD (§ 86) che s' uniscano in C.

Dico essere ABCD il rettangolo cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè per la costruzione ABCD è parallelogrammo, e ha i lati AD, AB di-

ſuguali, e l'angolo in A retto; onde è rettangolo (§ 105), e rettangolo fatto da AB, e AD, o ſia da AB, ed L (113). Sicchè s' è coſtrutto il rettangolo ABCD, formato dalle rette AB, ed L. Ch' è ciò, che biſognava fare, e dimoſtrare.

COROLLARIO.

118. Sicchè qualora diremo il rettangolo fatto da AB, ed L, intenderemo il rettangolo ABCD, la cui lunghezza è AB, e la larghezza è AD = L.

PROP. XXXIV. TEOR. XXV.

119. *Se una retta è diviſa in qualunque numero di parti, uguali o diſuguali che ſieno, ed un' altra è indiviſa, il rettangolo fatto dall' intera diviſa, e dalla indiviſa è uguale alla ſomma di tutt' i rettangoli fatti dall' indiviſa, e da ciaſcuna parte della diviſa.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 31 Sia la retta AB diviſa nelle parti AE, EG, GB, ed L ſia la retta indiviſa. Si formi da AB, e da AD = L il retrangolo ABCD (§ 117); e dai punti E, e G s'innalzino su AF le perpendicolari EF, GH (§ 72). Saranno AF, EH, GC rettangoli; onde sì GH, che EF ſarà uguale ad AD,

AD, ovvero ad L. Ma il rettangolo AG uguaglia la ſomma de' rettangoli AF, EH, GC (§ 59). Dunque, eſſendo formati il rettangolo AC dalle rette AB, AD, o AB, ed L, il rettangolo AF dalle rette AE, AD, o AE, ed L, il rettangolo EH dalle rette EG, EF; o EG, ed L, e'l rettangolo GC dalle rette GB, GH, o GB, ed L, ſarà il rettangolo fatto da AB, ed L uguale alla ſomma di quelli, che ſi formano, uno da AE, ed L, l'altro da EG, ed L, e l'altro da GB, ed L. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO I.

120. Se ſarà L = AB, ſarà il rettangolo fatto da AB, e L l'iſteſſo, che il quadrato fatto ſu AB. Onde il quadrato fatto ſu AB è uguale alla ſomma de' rettangoli fatti uno da AB, ed AE, l'altro da AB, ed EG, e l'altro da AB, e GB. Sicchè ſe una retta è diviſa in più parti, il quadrato fatto ſull' intera retta è uguale alla ſomma de' rettangoli fatti dall' intera retta, e da ciaſcuna delle ſue parti.

COROLLARIO II.

121. Se sarà L uguale a una delle parti di AB, per eſempio uguale a BG, ſarà il rettangolo fatto da AB, e BG uguale alla ſom-

ſomma de' rettangoli fatti, uno da AE, e BG, l'altro da EG, e BG, e l'altro da GB, e BG, o ſia il quadrato di BG. Sicchè ſe una retta è diviſa in più parti il rettangolo fatto dall' intera retta, e da una delle ſue parti è uguale al quadrato fatto ſull' iſteſſa parte, una co' rettangoli fatti dall' iſteſſa parte, e da ciaſcuna delle altre.

COROLLARIO III.

122. Se anche L ſarà diviſa in parti; i rettangoli fatti da AE, e L, da EG, ed L, da GB, ed L ſaranno uguali a tutt' i rettangoli fatti da AE, EG, GB, e da ciaſcuna parte di L. Sicchè ſe ſaranno AB, ed L ambedue diviſe in parti, il rettangolo fatto da AB, ed L uguaglierà la ſomma di tutt' i rettangoli fatti da ciaſcuna parte di AB con ciaſcuna di L.

COROLLARIO IV.

223. Quindi ſe le parti di AB, ed L ſaranno tutte uguali, i detti rettangoli ſaranno quadrati, e quadrati tutti uguali. E perchè il numero de' rettangoli fatti da AE, ed L, da EG, ed L, da GB, ed L uguaglia il numero delle parti di AB; e 'l numero de' quadrati, che compongono ciaſcuno de' detti rettangoli, uguaglia il numero delle parti di L. Perciò ſe AB, ed L ſaranno ambe-

due

due diviſe in parti uguali, il rettangolo formato da AB, ed L uguaglierà la ſomma di tanti quadrati uguali, che avranno per lati le parti di AB, o rette ad eſſe uguali, quanti ne diſegnerà il prodotto del numero delle parti di AB moltiplicato per quello di L.

COROLLARIO V.

124. Sicchè ſe ſarà anche L = AB, nel qual caſo AC diverrà quadrato; ſarà il quadrato fatto ſu AB uguale alla ſomma di tanti quadrati uguali, che avranno per lati le parti di AB, o rette ad eſſe uguali, quanti ne diſegnerà il prodotto del numero delle parti di AB moltiplicato per ſe medeſimo.

PROP. XXXV. TEOR. XXVI.

125. *Il quadrato fatto ſulla ſomma di due rette è maggiore della ſomma de' quadrati fatti ſulle rette del doppio del rettangolo fatto dalle medeſime rette.*

DIMOSTRAZIONE.

Sia AC la ſomma di due rette AB, BC. Fig. 32
Sarà il quadrato di AC uguale alla ſomma de' rettangoli fatti uno da AC, ed AB, e l' altro da AG, e CB (§ 120). Ma di sì fatti rettangoli il primo uguaglia la ſomma del quadrato di AB, e del rettangolo fatto da AB, e BC, e 'l ſecondo uguaglia la ſomma del quadrato di BC, e del rettangolo fatto pu-

pure da AB, e BC (§ 121). Dunque il quadrato di AC è uguale alla ſomma de' quadrati fatti ſu AB, BC, e del doppio del rettangolo fatto da AB, è BC. E perciò il quadrato di AB è maggiore della ſomma de' ſoli quadrati di AB, e BC del doppio del rettangolo fatto da AB, e BC. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XXXVI. TEOR. XXVII.

126. *Il quadrato fatto ſulla differenza di due rette è minore della ſomma de' quadrati fatti ſulle rette del doppio del rettangolo fatto dalle iſteſſe rette.*

DIMOSTRAZIONE.

Sia AB la differenza di due rette AC, BC. Sarà il quadrato di AB minore del quadrato di AC della ſomma del quadrato di BC, e del doppio del rettangolo fatto da AB, e BC (§ *prec.*); e perciò minore della ſomma de' quadrati AC, e CB della ſomma del doppio del quadrato di BC, e del doppio del rettangolo fatto da AB, e BC. Ma il doppio del quadrato di BC, una col doppio del rettangolo fatto da AB, e BC è uguale al doppio del rettangolo fatto da AC, e CB (§ 121). Sicchè il quadrato di AB è minore della ſomma de' quadrati delle rette AC, CB del doppio del rettangolo-

golo fatto da AC, e CB. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO I.

127. Sia AC la ſomma di due rette AB, BC; ſarà, tagliata da AB la BD = BC, la AD la differenza delle medeſime rette AB, BC. Eſſendo il quadrato di AC maggiore de' quadrati di AB, BC del doppio del rettangolo fatto da AB, e BC (§ 125); e 'l quadrato di AD minore de' quadrati di AB, e BD, o di AB, e BC, del doppio del rettangolo fatto da AB, e BD, o da AB, e BC (§ *prec.*); ſarà il quadrato di AC maggiore del quadrato di AD del quadruplo del rettangolo fatto da AB, e BC. Sicchè il quadrato fatto ſulla ſomma di due rette è maggiore del quadrato fatto ſulla differenza di eſſe del quadruplo del rettangolo fatto dalle iſteſſe rette. Fig. 33

COROLLARIO II.

128. In oltre ſia AC la differenza di due rette AB, BC; aggiungnendovi BD = BA, ſarà DC la ſomma delle medeſime rette. Eſſendo il quadrato di DC uguale ai quadrati di AB, e BC, aggiuntovi il doppio del rettangolo fatto da AB, e BC (§ 125); ed il quadrato di AC uguale ai quadrati di AB, e BC, toltone il doppio del Fig. 34

del rettangolo fatto da AB, e BC; ſarà la ſomma de' quadrati fatti uno ſu DC, e l'altro ſu AC il doppio de' quadrati fatti uno ſu AB, e l' altro ſu BC. Sicchè i quadrati fatti uno ſulla ſomma di due rette, e l'altro ſulla differenza ſono il doppio de' quadrati fatti ſulle medeſime rette.

COROLLARIO III.

129. Eſſendo finalmente delle rette DC, CA in un caſo AB la metà della ſomma, e BC la metà della differenza, e nell' altro caſo BA la metà della differenza, e BC la metà della ſomma; ed eſſendo i quadrati di DC, e CA in ambidue i caſi il doppio de' quadrati di AB, BC. E' chiaro che la ſomma de' quadrati fatti ſu due rette diſuguali è il doppio de' quadrati fatti uno ſulla metà della ſomma, e l'altro ſulla metà della differenza delle iſteſſe rette.

PROP. XXXVII. TEOR. XXVIII.

130. *Il rettangolo fatto dalla ſomma di due rette diſuguali, e dalla differenza è uguale alla differenza de' quadrati fatti ſulle medeſime rette,*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno AB, BC due rette diſuguali. S' aggiun-

giunga BD = BA ; ſarà di BA , BC la ſomma DC , e la differenza CA . Eſſendo il rettangolo fatto da DC , e CA uguale alla ſomma de' rettangoli fatti , uno da DB, o ſia BA, e AC , e l'altro da BC , e CA (§ 119) ; e conſeguentemente uguale alla ſomma de' rettangoli fatti in un caſo uno da BA , e AC , e l'altro da AB , e BC, toltone il quadrato di BC , e nell' altro caſo uno da BC, e CA, e l'altro da CB, e BA , toltone il quadrato di AB ; ed eſſendo i due rettangoli fatti in un caſo uno da AB, e BC, e l'altro BA , e AC uguali al quadrato di AB , e nell' altro caſo uno da CB , e BA , e l' altro da BC , e CA uguali al quadrato di BC . Sarà il rettangolo fatto da DC , e CA uguale in ambidue i caſi alla differenza de' quadrati fatti su AB , e BC . Ch' è ciò , cha biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

131. Eſſendo delle rette DC, CA in un caſo AB la metà della ſomma , e BC la metà della differenza , e nell' altro caſo AB la metà della differenza , e BC la metà della ſomma . E' chiaro che il rettangolo fatto da due rette diſuguali DC , CA è uguale alla differenza de' quadrati fatti uno ſulla metà della ſomma delle medeſime rette, e l'altro ſulla metà della differenza.

CAP.

CAP. VIII.

Della quantità de' quadrati formati ſu i lati de' triangoli.

PROP. XXXVIII. TEOR. XXIX.

132. *In ogni triangolo rettangolo il quadrato fatto ſull'ipotenuſa è uguale alla ſomma de' quadrati fatti ſu i cateti.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 35 Sia ABC triangolo rettangolo in B. Si facciano su i lati AB, BG, CA i quadrati AH, CF, AD (§ 115). Per B ſi tiri BL parallela a GD (§ 86); e s'uniſcano le rette BD, AG.

Eſſendo retto sì l'angolo ABC, che CBF; ſarà la ſomma di ABC, CBF uguale a due retti; onde AB, BF formano una retta continuata (§ 77). E perciò, per le parallele BF, CG, l'intera AF è parallela a GC. Similmente ſi dimoſtra eſſere l'intera CH parallela ad AI. In oltre gli angoli DCA, BCG ſono uguali (§ 61); aggiuntovi di comune l'angolo ACB, uguali ſaranno anche DCB, ACG (§ 52). Sono di più

DC

DC = AC, CB = CG. Dunque uguali ſono anche i triangoli DCB, ACG (§ 98). Di vantaggio il rettangolo LC, e 'l triangolo DCB hanno l' iſteſſa baſe DC, e ſono racchiuſi tra le iſteſſe parallele BL, DC. Dunque il rettangolo LC è il doppio del triangolo DCB (§ 109). Similmente il quadrato CF, e 'l triangolo ACG hanno l' iſteſſa baſe CG, e ſono racchiuſi tra le parallele AF, CG. Onde il quadrato CF è il doppio del triangolo ACG (§ 109). Per la qual coſa, eſſendo uguali i triangoli DCB, ACG, uguali ſaranno ancora il retangolo LC, e 'l quadrato CF. Dell' iſteſſo modo ſi dimoſtra eſſere il rettangolo AL uguale al quadrato AH. Sicchè la ſomma de' rettangoli AL, LC, o ſia il quadrato AD dell' ipotenuſa AC è uguale alla ſomma de' quadrati AH, CF, fatti su i cateti AB, BC. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XXXIX. TEOR. XXX.

133. *In ogni triangolo ottuſangolo il quadrato fatto ſul lato oppoſto all' angolo ottuſo è maggiore della ſomma de' quadrati fatti ſu gli altri due lati del doppio del rettangolo fatto da uno di queſti lati, e dalla porzione, che l' aggiugne la perpendicolare calata dal vertice dell' angolo oppoſto.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 36 Sia ABC triangolo ottuſangolo in B. Dal punto A ſi cali su CB prolungata in D la perpendicolare AD (§ 73). Sarà il quadrato di AC uguale alla ſomma de' quadrati fatti su CD, DA (§ *prec.*). Ma il quadrato di CD è maggiore de' quadrati fatti su CB, BD del doppio del rettangolo fatto da CB, e BD (§ 125). Dunque il quadrato fatto su AC è anche maggiore de' quadrati fatti su CB, BD, DA; o ſia de' quadrati fatti su CB, BA del doppio del rettangolo fatto da CB, e BD. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XL. TEOR. XXXI.

134. *In ogni triangolo il quadrato fatto ſul lato oppoſto a un' angolo acuto è minore della ſomma de' quadrati fatti ſu gli altri due lati del doppio del rettangolo fatto da uno di queſti lati, e dalla porzione adiacente all' angolo acuto, che taglia dal medeſimo lato la perpendicolare calata dal vertice dell' angolo oppoſto.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 37 Sia ABC triangolo, che ha l' angolo in C acuto. Da B ſi cali su AC la perpendicolare BD (§ 73). Sarà il quadrato fatto

to su AB uguale alla ſomma de' quadrati fatti su AD, DB (§ 132). Ma il quadrato fatto su AD è minore de' quadrati fatti su AC , CD del doppio del rettangolo fatto da AC , e CD (§ 126). Dunque anche il quadrato fatto su AB è minore della ſomma de' quadrati fatti su AC , CD , DB , o ſia de' quadrati fatti su AC , CB del doppio del rettangolo fatto da AC , e CD . Ch' è ciò , che biſognava dimoſtrare.

PROP. XLI. TEOR XXXII.

135. *L'angolo, che formano due lati d'un triangolo è ottuſo , retto , o acuto , ſecondochè il quadrato fatto ſul lato oppoſto a tale angolo è maggiore , uguale , o minore della ſomma de' quadrati fatti ſu gli altri due lati.*

DIMOSTRAZIONE.

Eſprima ABC qualſivoglia triangolo . Dal punto B s' innalzi su BC la perpendicolare BD, ed uguale ad AB; e ſi congiunga CD. Eſſendo AB = BD , ſarà la ſomma de' quadrati fatti su AB , BC uguale alla ſomma de' quadrati fatti su DB , BC , o ſia al quadrato di DC (§ 132). Onde ſecondochè il quadrato di AC ſarà maggiore, uguale, o minore de' quadrati fatti su AB , BC , ſarà anche il quadrato di AC maggiore , uguale, o minore del quadrato di CD ; e perciò ſa- Fig. 38

rà AC maggiore, uguale, o minore di CD, e conſeguentemente l'angolo ABC ſarà maggiore, uguale, o minore dell' angolo retto CBD (§ 19); cioè l' angolo ABC ſarà ottuſo, retto, o acuto. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

CAP. IX.

Si ſciolgono alcuni problemi, che appartengono alla teorica de' quadrati, e de' rettangoli.

PROP. XLII. PROBL. X.

136. *Dati più quadrati, trovarne un' altro, che ſia uguale alla ſomma di eſſi.*

SOLUZIONE.

Sieno A, B, C i lati de' quadrati dati.

Fig. 39 1. Si faccia l'angolo retto LMN; e tagliate MD = A, ME = B, s' uniſca DE.

2. Si taglino MG = DE, MF = C (§ 50), e s' uniſca FG.

Dico eſſere FG il lato del quadrato cercato.

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè il quadrato fatto su FG uguaglia la ſomma de' quadrati fatti su FM, MG (§ 132), o su C, e DE, o su C, EM, MD, e per conſeguenza su C, B, A. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XLIII. PROBL. XI.

137. *Dati due quadrati diſuguali, trovarne un' altro, che ſia uguale alla differenza di eſſi.*

SOLUZIONE.

Sieno A, e B i lati de' quadrati dati. Fig. 40
Si faccia l'angolo retto LMN; e, tagliate MP = B, PO = A, ſi deſcriva col centro P, e coll' intervallo PO il cerchio OQ (§ 48), che interſeca colla periferia LM in Q.

Dico eſſere MQ il lato del quadrato cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, congiunta PQ, il quadrato fatto su MQ uguaglia la differenza de' quadrati fatti su QP, PM, o su PO, PM, o su A, e B. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. LXIV. PROBL. XII.

Fig.41 138. *Data qualunque retta AB, prolungarla in D in modo, che il rettangolo fatto da AD, DB sia uguale al quadrato fatto su AB.*

SOLUZIONE.

1. Si divida AB in due parti uguali in O (§ 71).
2. Dal punto B s' innalzi su AB la perpendicolare BC (§ 72), ed uguale ad OB; e si congiunga AC.
3. Si prolunghi AB in D, finchè sia OD = AC.

Dico essere AD la retta cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè il rettangolo fatto da AD, e DB è uguale alla differenza de' quadrati fatti su OD, OB (§ 130), o su AC, BC; e conseguentemente il rettangolo fatto da AD, e DB è uguale al quadrato di AB, Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XLV. TEOR. XIII.

139. *Data una retta, dividerla in un punto in modo, che il rettangolo fatto dall' intera retta, e da una delle sue parti sia uguale al quadrato fatto sull' altra parte.*

So-

SOLUZIONE.

Sia AB la retta data. Fig. 42

1. Si prolunghi AB in D in modo, che ſia il rettangolo fatto da AD, DB uguale al quadrato di AB (§ *prec.*).

2. Da AB ſi tagli BC = BD (§ 50).

Dico. eſſere il rettangolo fatto da BA, e AC uguale al quadrato fatto ſu BC.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè la ſomma de' rettangoli fatti da AB, e EC, e da BA, e AC è uguale al quadrato fatto ſu AB (§ 120); e perciò uguale al rettangolo fatto da AD, e DB, o ſia alla ſomma del rettangolo fatto da AB, e BD, o da AB, e BC, e del quadrato fatto ſu BD, o ſu BC (§ 121). Toltone il comune rettangolo fatto da AB, e BC, ſarà il rettangolo fatto da BA, e AC uguale al quadrato fatto ſu BC (§ 53). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

Fine del primo Libro.

LIBRO II.

Della teorica del Cerchio.

CAP. I.

Del ſito, che ha il centro nel cerchio, e del modo di trovarlo.

PROP. I. TEOR. I.

Fig. 43 140. *S' interſechino le due corde AB, CD di qualſiſia cerchio ACBD. Dico* I. *che in AB è il centro, ſe eſſa divide CD in due parti uguali, e ad angoli retti;* II. *che ſe AB paſſa pel centro, e divide CD in due parti uguali, la divide pure ad angoli retti;* III. *che ſe AB paſſa pel centro, e divide CD ad angoli retti, la divide anche in due parti uguali,*

DIMOSTRAZIONE.

I. Sia, s'è poſſibile, il centro in P fuori di

di AB. Si congiungano le rette PC, PE, PD. Avendo i due triangoli PEC, PED il lato CE = ED, il lato EP comune, e la base PC = PD, come raggi; saranno gli angoli PEC, PED uguali (§ 99), e per conseguenza retti. Onde l' angolo PEC uguaglia OEC (§ 61). Ma ciò è impossibile. Dunque è impossibile che il centro sia fuori di AB.

II. Sia il punto O della retta AB il centro. Si congiungano OC, OD. Essendo ne' triangoli OEC, OED il lato CE = ED, il lato OE comune, e la base OC = OD § 40); saranno gli angoli OEC, OED uguali (§ 99), e per conseguenza retti. Sicchè AB divide CD ad angoli retti.

III. Avendo i triangoli OEC, OED l'angolo OEC uguale ad OED, perchè retti per l'ipotesi, l' angolo OCE uguale ad ODE, perchè angoli alla base del triangolo isoscele COD, e conseguentemente l' angolo COE uguale a DOE (§ 89), e 'l lato OE comune; sarà EC = ED (§ 100). Sicchè AB divide CD in due parti uguali. Ch' è quanto bisognava dimostrare.

PROP. II. TEOR. II.

141. *Se da un punto esistente dentro d'un cerchio si possono tirare alla periferia più di due rette uguali, un sì fatto punto è il centro.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Fig.44. Sia il punto O esistente dentro del cerchio ACG, da cui si possono tirare tre rette OA, OB, OC uguali tra esse. S' uniscano le rette AB, BC, e si dividano in due parti uguali in D, ed F; indi per gli punti D, e O si tiri DE, e per gli punti F, O si tiri FG. Essendo il lato AD = DB, il lato DO comune, e la base AO = OB, saranno gli angoli ODA, ODB uguali (§ 19), e per conseguenza retti (§ 21). Sicchè DE divide AB in due parti uguali, e ad angoli retti; e perciò in DE è il centro (§ *prec.*). Similmente si dimostra essere il centro in FG. Ma il centro è un punto solo. Dunque è il punto O, comune alle due DE, FG. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. III. PROBL. I.

142, *Dato un cerchio, trovare il suo centro.*

SOLUZIONE.

Fig.43 Sia ACD il cerchio dato.

1. Si prendano nella periferia due punti C, e D ad arbitrio, e s' uniscano con CD.

2. Si divida CD in due parti uguali in E; e per E si tiri AB perpendicolare a CD.

3. Si

3. Si divida AB in due parti uguali in O. Dico che O è il centro cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè AB divide CD in due parti uguali, e ad angoli retti. Dunque in AB è il centro (§ 140); e conſeguentemente è il punto O, in cui AB è diviſa in due parti uguali. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. IV. PROBL. II.

143. *Dato un' arco qualunque di cerchio, trovare il centro di sì fatto cerchio.*

SOLUZIONE.

Sia ABC l'arco dato. Fig. 45

1. Si prendano nell' arco ad arbitrio tre punti A, B, C, e ſi congiungano le rette AB, BC.

2. Diviſe AB, BC in due parti uguali in D, ed E, s' innalzino da D, ed E ſu AB, e BC le perpendicolari DF, EG, e ſi prolunghino, finchè s' interſechino in O.

Dico eſſere O il centro cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Dividendo DF, EG le rette AB, BC in due parti uguali, e ad angoli retti, ſarà il centro del cerchio sì in DF, che in EG (§ 140). Ma il centro è un punto ſolo. Dunque è il punto O, comune a DF, EG. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

144. Se col centro O, e coll' intervallo d' una delle rette, che da O ſi poſſono tirare alli punti A, B, C, ſi deſcriverà il cerchio, ſi compirà quello, della cui periferia l' arco ABC è porzione. E perciò è chiaro il modo di deſcrivere un cerchio, che paſſi colla ſua periferia per tre punti dati A, B, C non eſiſtenti in una linea retta.

CAP.

CAP. II.

Dell' ordine, che ſerbano nella grandezza le rette tirate alla periferia di qualunque cerchio.

DEFINIZIONE.

145. Si dirà *diſtanza dal centro* d' una corda d' un cerchio la perpendicolare calata su di eſſa dal centro.

PROP. V. TEOR. III.

146. *Di tutte le infinite rette, che ſi poſſono tirare alla periferia di qualunque cerchio BDCE da qualſivoglia punto A, eſiſtente nell' iſteſſo cerchio, e diverſo dal centro O, 1.° la maſſima è AB, che paſſa pel centro O; 2.° la minima è AC, reſtante porzione del diametro BC; 3.° ognuna delle altre è maggiore di quelle, che ſono più di eſſa diſtanti dalla maſſima; 4.° e di sì fatte rette ognuna non può averne, ſe non ſe un' altra, che le ſia uguale.* Fig. 46

DIMOSTRAZIONE.

Si tiri AD; e, congiunto il raggio DO, ſi fac-

ſi faccia l' angolo AOE uguale ad AOD; e s' unisca AE.

I. Essendo OB = OD; aggiuntavi di comune AO, sarà AB uguale alla somma di AO, OD, e perciò maggiore di AD (§ 68). Similmente si dimostra essere AB maggiore d' ogni altra, che da A si può tirare alla periferia. Dunque di tutte le infinite rette, che da A si possono tirare alla periferia, la massima è AB.

II. Essendo OC = OD (§ 40), e perciò minore di OA, AD (§ 63); toltane la comune OA, sarà AC minore di AD. Similmente si dimostra essere AC minore d' ogni altra, che da A si può tirare alla periferia. Dunque di tutte le infinite rette, che da A si possono tirare alla periferia, la minima è AC.

III. Essendo AD base dell' angolo AOD, sarà essa maggiore, o minore, secondochè l' angolo AOD sarà maggiore, o minore (§ 19), cioè secondochè sarà DA più vicina, o più lontana da AB. Dunque ogni retta, che si tira da A alla periferia, diversa da AB, è maggiore di quelle, che sono più di essa distanti da AB.

IV. Finalmente essendo uguali gli angoli AOE, AOD, ed avendo il lato OE = OD, e 'l lato AO comune; sarà la base AE = AD (§ 19). Or se da A si tira un' altra retta alla periferia, essa sarà più, o meno di AD vicina ad AB; e perciò sarà

mag-

maggiore, o minore di AD. Sicchè ogni retta tirata da A alla periferia, e diversa da AB, ed AC, non può averne, se non se un' altra sola, che le sia uguale. Ch' è quanto bisognava dimostrare.

PROP. VI. TEOR. IV.

147. *Di tutte le infinite rette, che si possono tirare sì alla parte concava, che alla parte convessa della periferia di qualunque cerchio EDFG da qualsisia punto A esistente fuori dell'istesso cerchio,* 1.° *la massima è la retta AB, che passa pel centro O;* 2.° *la minima è AC;* 3.° *ognuna delle altre, se giungono alla parte concava, è maggiore di quelle, che sono più di essa distanti dalla massima AB;* 4.° *se giungono alla parte convessa, è minore di quelle, che sono più di essa distanti dalla minima AC;* 5.° *e di tali rette ognuna non può averne, se non se un' altra sola, che le sia uguale.* Fig. 47

DIMOSTRAZIONE.

Si tiri qualunque retta AD. Si congiungano i raggi OD, OE; e, fatti gli angoli AOF, AOG rispettivamente uguali ad AOD, AOE, si congiungano AF, AG.

I. Essendo OB = OD; aggiuntavi di comune AO, sarà AB uguale alla somma di AO, OD (§ 52), e perciò maggiore di AD (§ 63), e molto più maggiore di AE,

AE. Similmente si dimostra essere AB maggiore d' ogni altra retta, che da A si può tirare e alla parte concava, e alla parte convessa della periferia. Sicchè di tutte le infinite rette, che da A si possono tirare e alla parte concava, e alla parte convessa della periferia EDFG, la massima è AB.

II. Essendo AO minore della somma di AE, EO (§ 63); toltene le uguali OC, OE; sarà AC minore di AE (§ 55), e molto più minore di AD. Similmente si dimostra essere AC minore d'ogni altra, che da A si può tirare e alla parte concava, e alla parte convessa della periferia. Dunque di tutte le infinite rette, che da A si possono tirare e alla parte concava, e alla parte convessa della periferia EDFG, la minima è AC.

III. Essendo AD base dell'angolo AOD; sarà essa maggiore, o minore, secondochè l'angolo AOD sarà maggiore, o minore (§ 19), cioè secondochè AD sarà più, o meno vicina ad AB. Dunque ogni retta, che da A si può tirare alla parte concava della periferia, diversa da AB, è maggiore di quelle, che sono più di essa distanti da AB.

IV. Essendo AE base dell'angolo AOE; sarà essa pure maggiore, o minore, secondochè l' angolo AOE sarà maggiore, o minore (§ 19), cioè secondochè AE sarà più, o meno distante da AC. Dunque ogni ret-

retta, che da A si può tirare alla parte convessa della periferia, diversa da AC, è minore di quelle, che sono più di essa distanti da AC.

V. Finalmente, essendo gli angoli AOF, AOG rispettivamente uguali ad AOD, AOE, ed avendo i lati rispettivamente uguali, saranno AF = AD, AG = AE (§ 19). Or se si tira da A un'altra retta alla periferia, essa, giungnendo alla parte concava, è maggiore, o minore di AD, secondochè è più, o meno di AD vicina ad AB, e, giugnendo alla parte convessa, è minore, o maggiore di AE, secondochè è più, o meno di AE vicina ad AC. Sicchè ogni retta, che si può tirare da A alla parte e concava, e convessa della periferia, diversa da AB, non può averne, se non se un'altra, che le sia uguale. Ch' è quanto bisognava dimostrare.

PROP. VII. TEOR. V.

148. *Di tutte le infinite corde, che si possono tirare in un cerchio,* 1.° *la massima è il diametro;* 2.° *ognuna delle altre è maggiore di quelle, che sono più di essa distanti dal centro;* 3.° *quelle, che sono uguali tra esse, hanno uguali distanze dal centro;* 4.° *e quelle, che hanno uguali distanze dal centro, sono tra esse uguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig.48 Sieno nel cerchio ABCD tirate due córde AB, CD; e su di esse sieno calate dal centro O le perpendicolari OE, OF. Saranno AB, CD doppie rispettivamente di AE, DF (§ 140). Si congiungano di più i raggi OA, OD.

I. Essendo l'angolo AEO retto; sarà l'angolo AOE minore del retto (§ 89). Onde AO è maggiore di AE (§.96), e conseguentemente il diametro maggiore di AB. Similmente si dimostra essere il diametro maggiore d'ogni altra corda. Sicchè di tutte le infinite corde, che si possono tirare in un cerchio, il diametro è la massima.

II. Essendo il quadrato di AE minore del quadrato di AO di quant' è il quadrato di OE; sarà il quadrato di AE maggiore, o minore, secondochè il quadrato di OE sarà minore, o maggiore. E perciò AE, e conseguentemente AB è maggiore, o minore, secondochè OE è minore, o maggiore. Dunque ogni corda diversa dal diametro è maggiore d'ogni altra, ch'è più di essa distante dal centro.

III. Sia AB = DG. Sarà AE = DF. Essendo uguali al quadrato di AO i quadrati di AE, EO, e al quadrato di DO i quadrati di DF, FO (§ 132); ed essendo i quadrati di AO, OD uguali tra essi:

ſi ; ſarà anche la ſomma de' quadrati di AE , EO uguale alla ſomma de' quadrati di DF , FO . Onde , toltine i quadrati uguali di AE, DF (§. 116), uguali ſaranno anche i quadrati di OE , OF ; e conſeguentemente uguali ſaranno pure le rette OE, OF (§ 116) . Sicchè le corde uguali AB, CD hanno diſtanze uguali dal centro.

IV. Sia finalmente OE = OF . Eſſendo la ſomma de' quadrati di AE , EO uguale alla ſomma de' quadrati di DF , FO ; ſaranno, toltine i quadrati uguali di OE , OF (§ 116) , uguali i quadrati di AE , DF (§ 53) . E perciò uguali ſaranno le rette AE, DF (§ 116), e conſeguentemente uguali le corde AB , DC . Sicchè uguali ſono le corde , che hanno uguali diſtanze dal centro. Ch'è quanto biſognava dimoſtrare.

CAP. III.

Delle tangenti de' cerchi , e del modo di tirarle.

DEFINIZIONE.

149. Una retta ſi dice *tangente* d'un cerchio, se , eſiſtente fuori del cerchio, incontra la ſua periferia in un ſolo punto , e pro-

lungata cade interamente fuori dell' istesso cerchio. Il punto, in cui la tangente incontra la periferia, si dice *punto del contatto*.

PROP. VIII. TEOR. VI.

150. *Ogni tangente d' un cerchio forma col raggio tirato al punto del contatto un' angolo retto.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 49 Sia AB una retta qualunque, che incontra la periferia BCF ne' punti B, e C. Si concepisca che la retta AB si muova intorno al punto A, allontanandosi continuamente dal centro O, finchè divenghi tangente del cerchio. In sì fatto movimento della retta AB i punti B, e C continuamente s' avvicineranno, e finalmente s' uniranno nel punto del contatto; e, tirati i raggi OB, OC, l' angolo BOC continuamente si diminuirà, e finalmente diverrà nullo. Ma l' angolo ACO deve sempre uguagliare la somma di COB, OBC (§ 88). Dunque, quando AB diviene tangente, l'angolo ACO diviene uguale ad OBC, e perciò uguale ad OCB, e conseguentemente retto. Per la qual cosa ogni tangente, ec.. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

AV-

AVVERTIMENTO.

151. Si noti che tra la tangente d' un cerchio, e la periferia non può paſſarvi una retta tirata dal punto del contatto. In fatti ſia AE tangente del cerchio BCF nel punto D; e ſi tiri dal punto D del contatto, s'è poſſibile, la retta DG, che paſſi tra la tangente, e la periferia. Eſſendo, congiunto il raggio OD, l'angolo ODA retto, ſarà l' angolo ODG acuto. Onde OD non è perpendicolare a DG. Si cali dunque su DG dal centro O la perpendicolare OX. Sarà OX minore di OD (§ 96), o ſia di OL; cioè il tutto minore della parte. Ma ciò è impoſſibile (§ 59). Dunque è impoſſibile poter tirare dal punto del contatto D una retta, che paſſi tra la tangente, e la periferia.

COROLLARIO.

152. Quindi l' angolo miſtilineo, fatto dalla tangente, e dalla periferia, e chiamato da' Geometri angolo del contatto, non è diviſibile da una linea retta.

PROP. IX. TEOR. VII.

153. *Se una retta eſiſtente fuori d' un cerchio incontra la periferia in un punto.*

ed è perpendicolare al raggio tirato all'istes-so punto, sì fatta retta è tangente del cer-chio nel medesimo punto.

DIMOSTRAZIONE.

Incontri AD la periferia del cerchio BCF nel punto D, e sia perpendicolare al raggio OD. Si prolunghi AD verso E. Essendo OD perpendicolare ad AE, sarà OD la minima di tutte le rette, che da O si possono tirare a tutt' i punti di AE, diversi da D [§ 97). Onde tutt' i punti di AE, diversi da D, sono fuori del cerchio. E perciò AE è tangente del cerchio nel punto D. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. X. PROB. III.

154. *Dato un punto fuori d' un cerchio, tirare dal punto dato una retta, che sia tangente del cerchio.*

SOLUZIONE.

Fig.50 Sieno A il punto dato, e BCE il dato cerchio.

1. Si trovi il centro O (§ 142), e si congiunga OA, che interseca la periferia in C.

2. Col centro O, e coll' intervallo OA si descriva l'arco circolare AD; e dal punto C s' innalzi su OA la perpendicolare CD, che

che incontra l' arco AD in D.

3. Dal punto D al punto O ſi tiri DO, che interſeca la periferia CBE in B.

4. Finalmente dal punto A al punto B ſi tiri la retta AB.

Dico che AB è la tangente cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo ne' due triangoli ABO, DCO il lato AO = OD, OB = OC, e l' angolo AOB = DOC; ſarà l'angolo ABO = DCO (§ 98). Ma l' angolo DCO è retto per la coſtruzione. Dunque anche ABO è retto. E perciò AB è tangente del cerchio nel punto B (§ 153). Sicchè dal dato punto A s' è tirata la retta AB, tangente del cerchio BCE. Ch' è ciò, che biſognava fare, e dimoſtrare.

AVVERTIMENTO.

155. Se occorre di dover tirare la tangente per un punto della periferia, eſſa ſi ha facilmente, tirando per l' eſtremo del raggio, che giugne in tale punto, la perpendicolare al medeſimo raggio.

CAP. IV.

Degli angoli formati e ai centri, e alle periferie de' cerchi.

DEFINIZIONE I.

156. Si dice *angolo al centro* quello, il cui vertice è nel centro del cerchio; si dice poi *angolo alla circonferenza* quello, il cui vertice è in un punto della circonferenza.

DEFINIZIONE II.

157. Si dice *angolo nella porzione* quello, il cui vertice è in un punto dell' arco della porzione, e i cui lati passano per gli estremi della corda.

PROP. XI. TEOR. VIII.

158. *Ne' cerchi uguali gli angoli uguali, fatti ne' centri, appoggiano ad archi uguali, e al contrario.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 51 Sieno i cerchi AEB, CFD uguali.

I. Sieno gli angoli AOB, CPD fatti ne' centri uguali tra essi. S'intenda il cerchio AEB posto sul cerchio CFD in modo, che caschino il centro O sul centro P, e 'l raggio OA sul raggio PC; cascheranno, per l'uguaglianza degli angoli AOB, CPD, il raggio OB su PD, e per l'uguaglianza de' cerchi, e conseguentemente de' raggi, il punto A sul punto C, e 'l punto B sul punto D. Onde l'arco AB combacia coll'arco CD. Ma le grandezze, che combaciano, sono uguali (§ 57). Dunque l'arco AB è uguale all'arco CD.

II. Sia l'arco AB uguale all'arco CD. Se si niega essere l'angolo AOB uguale a CPD; sarà AOB maggiore, o minore di CPD. Sia, s'è possibile, AOB maggiore di CPD. S'intenda fatto in O l'angolo AOL = CPD. Sarà l'arco AL uguale a CD per la prima parte. Ma l'arco AB è per l'ipotesi uguale a CD. Dunque l'arco AL è uguale anche ad AB (§ 51): Il che è impossibile (§ 59). Dunque è impossibile che sia l'angolo AOB maggiore di CPD. Similmente si dimostra non essere AOB minore di CPD. Sicchè l'angolo AOB è uguale a CPD. Ch'è quanto bisognava dimostrare.

CO-

COROLLARIO I.

159. Essendo ne' cerchi uguali uguali gli archi, a' quali appoggiano angoli uguali fatti ne' centri, ed uguali gli angoli fatti ne' centri, qualora appoggiano ad archi uguali: in un' istesso cerchio saranno pure uguali gli archi, a' quali appoggeranno angoli uguali fatti nel centro, ed uguali gli angoli fatti nel centro, qualora appoggeranno ad archi uguali.

AVVERTIMENTO I.

160. Si noti che dal corrispondere in ogni cerchio sempre ad archi uguali angoli al centro uguali, e ad angoli uguali archi uguali, n' è derivato che ogni angolo si dice pure di tanti gradi, quanti ne contiene l' arco circolare, che tramezza tra i suoi lati, e ch' è descritto con prendere per centro il vertice dell'angolo, e per raggio qualunque lunghezza.

COROLLARIO II.

Fig. 52 161. S' intersechino AB, CD ad angoli retti; e si descriva col centro O, e con qualunque raggio OE il cerchio EFGH (§ 48). Essendo uguali i quattro angoli AOC, COB, BOD, DOA (§ 61), uguali saranno pure

re

re i quattro archi EF, FG, GH, HE. Onde ognuno di sì fatti archi è la quarta parte della periferia, e conseguentemente di 90 gradi. Sicchè ogni angolo retto è di 90 gradi, e conseguentemente due angoli retti di 180°, e quattro angoli retti di gradi 360.

AVVERTIMENTO II.

162. Si noti di vantaggio che ancorchè gli angoli ABC, DEF sieno di tanti gradi, quanti ne contengono gli archi GH, IK, e sia conseguentemente l' angolo ABC il doppio, il triplo, ec. dell' angolo DEF, secondochè il numero de' gradi dell' arco GH è il doppio, il triplo, ec. del numero de' gradi dell' arco IK: nondimeno se gli archi GH, IK sono descritti co' raggi disuguali; perchè i gradi d' un' arco in tal caso sono di disuguali grandezze de' gradi dell' altro; si conoscerà essere l' angolo ABC il doppio, il triplo, ec. dell' angolo DEF dal conoscere essere il numero de' gradi dell' arco GH il doppio, il triplo, ec. del numero de' gradi dell' arco IK, ma non già dall' essere l'arco GH il doppio, il triplo, ec. dell' arco IK. Se poi gli archi LM, IK sono descritti co' raggi uguali; perchè in tale caso i gradi d' un' arco sono d' uguale grandezza de' gradi dell' altro; si conoscerà l' angolo ABC essere il doppio, il triplo, ec. dell' Fig. 53

an-

angolo DEF non ſolamente dal conoſcere eſſere il numero de' gradi dell'arco LM il doppio, il triplo, ec. del numero de' gradi dell' arco IK, ma ben anche dall' eſſere l'arco LM il doppio, il triplo, ec. dell'arco IK. Quindi è che i Geometri prendono per miſure degli angoli continuamente gli archi circolari, che ne determinano i gradi di eſſi, deſcritti però co' raggi uguali, vale a dire archi circolari appartenenti all' iſteſſo cerchio, o a cerchi uguali.

AVVERTIMENTO III.

Fig. 51 163. Si noti finalmente che, tirate ne' cerchi uguali AEB, CFD le corde AB, CD, ſe ſarà la corda AB = CD, ſarà anche l'angolo AOB uguale all' angolo CPD (§ 19), e conſeguentemente l' arco AB uguale all' arco CD: e ſe ſarà l'arco AB uguale all'arco CD; perchè l'angolo AOB è uguale all'angolo CPD (§ 158), ſarà la corda AB = CD (§ 19).

COROLLARIO III.

164. Dunque ne' cerchi uguali le corde uguali tagliano archi uguali, e gli archi uguali hanno corde uguali.

PROP.

PROP. XII. TEOR. IX.

165. *L'angolo AOB al centro di qualunque cerchio ACB è il doppio dell'angolo ACB fatto alla circonferenza, appoggiando ambidue all'istesso arco AB.* Fig. 54 e 55

DIMOSTRAZIONE.

Dal punto C al centro O si tiri CO, e si prolunghi in D; caderà essa o tra i lati dell'angolo AOB, o fuori. Nel caso

I. Essendo de' triangoli isosceli AOC, BOC il lato CO prolungato in D; saranno l'angolo esterno AOD il doppio di ACO, e BOD il doppio di BCO (§ 88). Onde la somma di AOD, DOB, o l'intero AOB è il doppio della somma di ACO, OCB, o dell'intero ACB. Nel caso Fig. 54

II. Essendo de' triangoli isosceli BOC, AOC il lato CO prolungato in D; saranno tutto l'angolo BOD il doppio di tutto l'angolo BCO, e la parte del primo AOD anche il doppio della parte dell'altro ACO (§ 88). Sicchè il restante del primo AOB sarà pure il doppio del restante del secondo ACB (§ 64). Per la qual cosa l'angolo al centro, ec., Ch'è ciò, che bisognava dimostrare, Fig. 55

CO-

COROLLARIO I.

166. Corrispondendo in ogni cerchio agli angoli uguali fatti nel centro archi uguali, e ad archi uguali angoli uguali nel centro; corrisponderanno anche in ogni cerchio ad angoli uguali fatti nella periferia archi uguali, e ad archi uguali angoli alla periferia uguali.

COROLLARIO II.

167. Essendo l'angolo AOB di tanti gradi, quanti ne contiene l'arco AB; sarà l'angolo ACB alla periferia di tanti gradi, quanti ne conterrà la metà dell'arco AB. Onde gli angoli alla periferia d'un'istesso cerchio sono di tanti gradi, quanti ne contengono le metà degli archi, ai qnali appoggiano; e conseguentemente vengono misurati non dagli archi interi, ai quali appoggiano, ma dalle metà di essi.

COROLLARIO III.

168. Appoggiando tutti gli angoli fatti in un'istessa porzione di cerchio all'istesso arco, tutti sono dell'istesso numero di gradi, e conseguentemente uguali.

CO-

COROLLARIO IV.

169. Essendo di più la metà della mezza periferia di 90°, una porzione minore della metà della mezza periferia meno di 90°, e una porzione maggiore della metà della mezza periferia più di 90°. Dunque ogni angolo fatto nel mezzo cerchio è retto; ogni angolo fatto in una porzione maggiore del mezzo cerchio è minore del retto, e per conseguenza acuto; ed ogni angolo fatto in una porzione minore del mezzo cerchio è maggiore del retto, e conseguentemente ottuso.

COROLLARIO V.

170. Sia ABCD un quadrilatero qualunque iscritto nel cerchio ABCD. Sarà la somma degli angoli opposti in A, e C di tanti gradi, quanti ne contiene la metà della somma degli archi BCD, BAD, o la metà dell' intera periferia, e perciò uguale a due angoli retti. Similmente si conosce essere uguale a due retti la somma degli angoli opposti in B, e D. Sicchè in ogni quadrilatero iscritto in un cerchio la somma di due angoli opposti è uguale a due retti. Fig. 56

CO-

COROLLARIO VI.

Fig.57 171. S' interſechino le corde AD, BC nel punto O, diverſo dal centro. Sarà, congiunta la retta BD, l'angolo AOB uguale alla ſomma degli angoli ADB, DBC (§ 88), e perciò di tanti gradi, quanti ne contiene la metà della ſomma degli archi AB, CD.

COROLLARIO VII.

Fig.58 172. S' incontrino finalmente le corde AE, CD prolungate nel punto B fuori del cerchio. Sarà, congiunta AD, l' angolo ABC uguale alla differenza de' due ADC, DAB (§ 88), e perciò di tanti gradi, quanti ne contiene la metà della differenza de' due archi AC, DE.

AVVERTIMENTO.

Fig.59 173. Si noti che deſcrivendo un cerchio, che abbia per diametro l' ipotenusa AC di qualunque triangolo rettangolo ABC, passerà eſſo colla ſua periferia pel punto B; altrimenti ſe tagliaſſe il lato AB in qualunque altro punto D; congiunta la retta CD, ſarebbe l'angolo ADC, come fatto nel mezzo cerchio, retto, e perciò uguale ad ABC (§ 61). Onde nel triangolo BCD vi ſareb-

rebbero due angoli retti . Il che è impoſſibile . Sicchè la detta periferia deve paſſare pel punto B.

PROP. XIII. TEOR. X.

174. *Se una retta CB è tangente del cerchio AGD , e dal punto del contatto A ſi tira qualunque corda AD ; gli angoli fatti dalla tangente , e dalla corda uguagliano quelli , che ſi formano nelle porzioni alterne del cerchio ; cioè l'angolo BAD uguaglia l'angolo AGD fatto nella porzione AGD , e CAD uguaglia l'angolo AFD fatto nella porzione AFD .* Fig.60

DIMOSTRAZIONE.

Pel contatto A ſi tiri il diametro AE, e ſi congiunga DE. Eſſendo l'angolo ADE retto (§ 169), ſarà la ſomma di DEA , DAE uguale a un retto (§ 88) , e perciò uguale a BAE (§ 150) . Sicchè , toltone il comune DAE , ſarà l' angolo BAD uguale a DEA , e conſeguentemente uguale a DGA (§ 168). In oltre del quadrilatero AFDG l' angolo AFD , come ſupplimento a due retti di AGD (§ 170), è uguale a CAD, ch' è ſupplimento a due retti di BAD (§ 74) . Per la qual coſa se una retta , ec.. Ch' è ciò , che biſognava dimoſtrare.

PROP. XIV. TEOR. XI.

175. *Se la retta AB, esistente fuori del cerchio ADG, incontra la periferia in A, e forma colla corda AD l' angolo BAD uguale all' angolo fatto nella porzione alterna AGED; sarà AB tangente del cerchio in A.*

DIMOSTRAZIONE.

Per A si tiri il diametro AE, e si congiunga DE. Sarà l' angolo ADE retto (§ 169); e conseguentemente la somma de' due DEA, DAE è uguale anche a un retto (§ 88). E perciò, essendo l' angolo BAD = DEA per l' ipotesi, sarà l' angolo BAE retto. Onde BA è tangente in A (§ 153). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XV. PROBL. IV.

176. *Data una retta terminata, e data un' angolo rettilineo, costruire una porzione di cerchio, la quale abbia per sua corda la retta data, e gli angoli contenuti in essa uguali all' angolo dato.*

So-

SOLUZIONE.

Sia AD la retta data, e sia O il dato angolo.

1. Si faccia nel punto A della retta AD l'angolo DAB uguale all'angolo O (§ 67).

2. Dagli estremi di AD s'innalzino AE, DE rispettivamante perpendicolari ad AB, AD (§ 72), e si prolunghino, finchè s'uniscano in E.

3. Presa AE per diametro, si descriva il cerchio AGD, il quale, essendo l'angolo ADE retto, passa colla periferia pel punto D (§ 173). Dico che AGED è la porzione cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo AE diametro del cerchio AGD e l'angolo EAB retto; sarà AB tangente nel punto A (§ 153). Dunque gli angoli che si contengono nella porzione AGD, uguagliano l'angolo BAD (§ 174), e conseguentemente l'angolo O. Sicchè s'è costrutta la porzione AGD cercata. Ch'è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

PROP. XVI. PROBL. V.

177. *Dato un cerchio, e dato un'angolo rettilineo, tagliare dal cerchio dato una por-*

porzione, che contenghi angoli uguali al dato.

SOLUZIONE.

Sieno AGD il cerchio dato, ed O il dato angolo.

Si tiri prima AB, tangente del cerchio in qualunque punto A; e poscia si faccia in A l'angolo BAD uguale ad O (§ 67). Dico essere AGD la porzione cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo AB tangente in A; saranno gli angoli, che si contengono nella porzione AGD, uguali a BAD (§ 174), e perciò uguali all'angolo O. Sicchè s'è tagliata la porzione AGD cercata. Ch'è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

PROP. XVII. PROB. VI.

178. *Dato qualunque arco di cerchio, dividerlo in due parti uguali.*

SOLUZIONE.

Fig. 61 Sia ACB l'arco dato.

1. Si uniscano gli estremi A, e B dell'arco colla retta AB.

2. Si divida AB in due parti uguali in D (§ 71); e dal punto D s'innalzi DG perpendicolare ad AB.

Di-

Dico che l' arco ACB è diviſo in C in due parti uguali.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, congiunte le rette AC, CB, gli angoli ADC, BDC ſono uguali (§ 61), e hanno il lato AD = DB, e 'l lato DC comune. Dunque è anche la baſe AC = BC (§ 19); e perciò uguali ſono pure gli archi AC, CB (§ 164). Sicchè s' è diviſo l' arco ACB in due parti uguali in C. Ch' è ciò, che biſognava fare, e dimoſtrare.

AVVERTIMENTO I.

179. Si noti che il probl. della diviſione dell' arco circolare, e quello della diviſione dell' angolo rettilineo non formano in realtà, se non se un' iſteſſo probl.; poichè ſapendoſi ſciorre l' uno, ſi sa ſciorre anche l' altro. In fatti, preſo per centro il vertice dell' angolo AOB, e con qualſivoglia intervallo AO descritto l' arco AB, se ſi divide Fig. 62
l' angolo AOB in qualunque numero di parti uguali colle rette OC, OD, OE, OF, reſta diviſo ancora l' arco AB nell' iſteſſo numero di parti uguali; ed al contrario se ſi divide l' arco AB in qualunque numero di parti uguali AC, CD, DE, EF, FB, nel medeſimo numero di parti uguali reſta divi-

ſo dalle rette OC , OD , OE , OF anche l'angolo AOB.

COROLLARIO.

180. Dunque quelle diviſioni in parti uguali , che ſi poſſono fare nella Geometria elementare per riſpetto degli angoli rettilinei , ſi poſſono anche fare per riſpetto degli archi circolari ; e tutte le altre ſono nella Geometria elementare aſſolutamente impoſſibili .

AVVERTIMENTO II.

181. Ancorchè la triſezione degli angoli, e conſeguentemente degli archi circolari ſia generalmente impoſſibile nella Geom. elementare : nondimeno la triſezione dell' angolo retto , e perciò dell' arco , che il miſu-
Fig.63 ra , è poſſibile . Ed ecco come . Sia ABC un' angolo retto da triſecare . 1. Si prenda in BC ad arbitrio il punto E . 2. Su BE ſi coſtruiſca il triangolo equilatero BDE (§ *66*) . 3. Si divida finalmente l' angolo DBE in due parti uguali colla BG (§ *68*). Sarà l'angolo retto ABC diviſo in tre parti uguali ABD , DBG , GBC . Imperciocchè l' angolo DBE è $\frac{1}{3}$ di due retti , o $\frac{2}{3}$ di un retto . Dunque ciaſcuno degli angoli ABD, DBG , GBC è $\frac{1}{3}$ d' un retto.

AV-

AVVERTIMENTO III.

182. Si noti finalmente che nella Geom. elementare ſi poſſono dividere ancora l' angolo retto in 5 parti uguali, e due altri angoli ſpeziali, uno in 3, e l'altro in 5 parti uguali. Però de' modi d' eſeguire sì fatte diviſioni ſi dirà a ſuo luogo.

CAP. V.

Dell' uguaglianza de' rettangoli formati dalle rette, le quali, incontrandoſi dentro, o fuori del cerchio, tramezzano tra 'l punto dell' incontro, e la periferia.

PROP. XVIII. TEOR. XII.

183. *Se in un cerchio due corde s' interſecano, il rettangolo fatto dalle parti di una è uguale al rettangolo fatto dalle parti dell' altra.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Sieno le corde AB, CD ambedue dia- Fig. 64

metri del cerchio ACBD. Saranno i rettangoli fatti da AO, e OB, e da CO, e OD gli ſteſſi, che i quadrati de' raggi, e conſeguentemente uguali (§ 116).

Fig.65 II. Sia in oltre AB diametro del cerchio ACBD, e interſechi la corda CD, che non è diametro, ad angoli retti. Si congiunga il raggio OD. Eſſendo delle rette BO, OP la retta AP la ſomma, e la retta PB la differenza; ſarà il rettangolo fatto da AP, e PB uguale alla differenza de' quadrati fatti su OB, OP (§ 130), o su OD, OP, e perciò uguale al quadrato di PD (§ 132), e conſeguentemente uguale al rettangolo fatto da CP, e PD.

Fig.66 III. Sia di più AB diametro del cerchio ACBD, ed interſechi la corda CD, che non è diametro, ad angoli obbliqui. Dal centro O ſi cali su CD la perpendicolare OE, e ſi congiunga il raggio OD. Eſſendo delle rette BO, OP la ſomma AP, e la differenza PB, ſarà il rettangolo fatto da AP, e PB uguale alla differenza de' quadrati fatti su BO, OP (§ 130), o su OD, OP. Similmente eſſendo delle rette CE, EP la ſomma DP, e la differenza PC; ſarà il rettangolo fatto da CP, e PD uguale alla differenza de' quadrati fatti su DE, EP (§ 130), e conſeguentemente uguale alla differenza de' quadrati fatti su OD, OP. Dunque il rettangolo fatto da AP, PB è uguale al rettangolo fatto da CP, e PD (§ 51).

IV.

IV. S' intersechino finalmente nel cerchio ACBD le corde AB, CD, delle quali niuna sia diametro. Per P si tiri il diametro EF. Essendo al rettangolo fatto da EP, e PF uguale sì il rettangolo fatto da AP, e PB, che il rettangolo fatto da CP, e PD (*cas. prec.*); sarà il rettangolo fatto da AP, e PB uguale al rettangolo fatto da CP, e PD (§ 51). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare. Fig. 67

COROLLARIO.

184. Nel caso 2 s' è dimostrato che il rettangolo fatto da AP, e PB è uguale al quadrato di PD. Dunque la periferia circolare è una curva d' indole tale, che, calando da qualunque suo punto la perpendicolare a qualsisia diametro, il quadrato della perpendicolare uguaglia sempre il rettangolo fatto dalle porzioni, nelle quali dall' istessa perpendicolare resta diviso il diametro. Fig. 65

AVVERTIMENTO.

185. Si noti che questa proprietà del cerchio l' appartiene talmente, che se PD è perpendicolare ad AB, e 'l quadrato di PD uguaglia il rettangolo fatto da AP, e PB, il punto D è alla periferia del cerchio, che ha per diametro AB. Imperciocchè, divisa AB

AB in due parti uguali in O, e congiunta OD, essendo il rettangolo fatto da AP, e PB uguale per l' ipotesi al quadrato di PD, aggiuntovi di comune il quadrato di OP; sarà il rettangolo fatto da AP, e PB, una col quadrato di OP, uguale alla somma de' quadrati di OP, PD (§ 52), e perciò uguale al quadrato di OD (§ 132). Ma, essendo PA la somma di BO, OP, e BP la differenza, il rettangolo fatto da AP, e PB è uguale alla differenza de' quadrati di OB, OP (§ 130); e conseguentemente il rettangolo fatto da AP, e PB, una col quadrato di OP è uguale al quadrato di OB (§ 52). Sicchè i quadrati di OD, OB sono uguali tra essi (§ 51); e conseguentemente uguali sono le rette OD, OB. Onde la periferia del cerchio, che ha per raggio OB, o per diametro AB passa pel punto D.

PROP. XIX. TEOR. XIII.

Fig. 68 186. *Se da qualunque punto A, esistente fuori di qualsisia cerchio BCD, si tirano due rette, una, come AB, che sia tangente dell' istesso cerchio, e l' altra che li sia segante, cioè che giunga alla parte concava della periferia, sarà il rettangolo fatto dall' intiera segante, e dalla sua parte esistente fuori del cerchio uguale al quadrato della tangente.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

I. Sia la ſegante AC, che paſſa pel centro O. Si tiri dal centro O al punto del contatto B il raggio OB; ſarà l' angolo ABO retto (§ 150). Eſſendo delle rette AO, OD la ſomma AC, e la differenza AD; ſarà il rettangolo fatto da CA, e AD uguale alla differenza de' quadrati fatti su OA, OD (§ 130), o ſu AO; OB, e conſeguentemente uguale al quadrato di AB (§ 132).

II. Sia qualunque altra ſegante AE, che non paſſa pel centro O. Si cali da O su AE la perpendicolare OG, e ſi congiunga OF; ſarà FG = GE (§ 140). Eſſendo delle rette AG, GF la ſomma AE, e la differenza AF; ſarà il rettangolo fatto da EA, ed AF uguale alla differenza de' quadrati di AG, GF (§ 130); e perciò uguale alla differenza de' quadrati di AO, OF, o di AO, OB, e conſeguentemente uguale al quadrato di AB (§ 132). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

187. Quindi tutt' i rettangoli, che ſi poſſono formare da tutte le infinite ſeganti, che dal punto A ſi poſſono tirare al cerchio BCL, e dalle porzioni di eſſe eſiſtenti fuori dell'

dell' istesso cerchio, tutti sono tra essi uguali.

PROP. XX. TEOR. XIV.

Fig. 69 188. *Sieno da qualunque punto A, esistente fuori di qualsivoglia cerchio BCD, tirate due rette AB, AD, delle quali AB giunga alla parte convessa della periferia, e AD alla parte concava, e sia il rettangolo fatto dalla segante AD, e dalla sua porzione AE, esistente fuori del cerchio, uguale al quadrato di AB; sarà la retta AB tangente del cerchio nel punto B.*

DIMOSTRAZIONE.

Dal punto A si tiri la tangente AC, e dal centro O si tirino le rette OC, OA, OB. Essendo al rettangolo fatto da DA, e AE uguale sì il quadrato di AB per l'ipotesi, che quello di AC (§ 186); sarà il quadrato di AB uguale al quadrato di AC (§ 51). E perciò sarà AB = AC (§ 116). Essendo dunque il lato AB = AC il lato BO = CO, e la base AO comune; sarà l'angolo ABO uguale ad ACO (§ 19). Ma ACO è retto (§ 150). Dunque ABO è anche retto; e perciò AB è tangente nel punto B (§ 153). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

CO-

COROLLARIO.

189. Non potendoſi dal punto A tirare alla parte conveſſa della periferia un' altra retta uguale alle due AB, AC (§ 147); cioè un' altra retta, il cui quadrato ſia uguale al rettangolo fatto da DA, e AE. E' manifeſto che dal punto A non ſi può tirare un' altra retta diverſa da AB, AC, che ſia tangente del cerchio. Sicchè da un punto eſiſtente fuori d' un cerchio non ſi poſſono tirarè, ſe non ſe due tangenti, le quali ſono tra eſſe uguali.

CAP. VI.

Delle Iſcrizioni sì delle figure regolari ne' cerchi, che de' cerchi nelle figure regolari, e delle Circoſcrizioni tanto delle figure regolari intorno a' cerchi, quanto de' cerchi intorno alle figure regolari.

DEFINIZIONE I.

190. Si dice *figura regolare* ogni rettilineo equilatero, ed equiangolo. Si dice poi *fi-*

figura irregolare ogni rettilineo, a cui mancano o una, o tutte e due le anzidette condizioni.

DEFINIZIONE II.

191. Se una figura regolare è ſituata in un cerchio in modo, che i vertici de' ſuoi angoli ſono tutti alla periferia, la figura ſi dice *iſcritta* nel cerchio, e 'l cerchio ſi dice *circoſcritto* intorno la figura. Se poi una figura regolare è ſituata intorno a un cerchio in modo, che tutt' i ſuoi lati ſono tangenti del cerchio, la figura ſi dice allora *circoſcritta* intorno al cerchio, e 'l cerchio ſi dice *iſcritto* nella figura.

COROLLARIO I.

192. Dividendo le figure regolari iſcritte ne' cerchi le periferie in tante parti uguali, quante ne diſegnano i lati di eſſe: è facile ad intendere che per iſcrivere in un cerchio una figura regolare di 3, 4, 5, 6, ec. lati, è neceſſario dividere la ſua periferia in 3, 4, 5, 6, ec. parti uguali. E perciò quelle figure regolari ſi potranno coll' ajuto della Geo. elementare iſcrivere ne' cerchi, che eſigeranno diviſioni della periferia in parti uguali, che ſi potranno colla riga, e col compaſſo eſeguire. Tutte le altre ſaranno iſcrizioni impoſſibili nella Geo. elementare, ed

ed eſeguibili ſolamente nella Geo. ſublime.

COROLLARIO II.

193. In oltre ſe una figura iſcritta in un cerchio è equilatera, è ancora equiangola, e conſeguentemente regolare; perchè ogni ſuo angolo appoggia ſull' intera periferia, diminuita di due degli archi uguali, che tagliano i ſuoi lati.

DEFINIZIONE III.

194. Si dice una retta *adattata* in un cerchio, ſe è ſituata nel cerchio in modo, che ſia una delle ſue corde.

COROLLARIO.

195. Eſſendo il diametro la maſſima di tutte le corde del cerchio (§ 148): ne ſegue che ſi potrà una retta data adattare in un dato cerchio, ſe eſſa non ſarà maggiore del ſuo diametro.

LEMMA.

196. *Dato un cerchio, e data una retta, che non ſia maggiore del ſuo diametro, adattare la retta data nel cerchio.*

So-

SOLUZIONE.

Fig.70 Sieno ABC il cerchio dato, ed L la data retta.

1. Si tiri nel cerchio qualunque diametro AC. Se sarà AC = L, sarà AC la retta cercata; altrimenti

2. Si tagli AD = L (§ 50); e, descritto col cento A, e coll' intervallo AD l'arco circolare DB (§ 42), si congiunga AB.

Dico essere AB la retta cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè AB è uguale ad AD (§39), e perciò è uguale ad L. Sicchè nel dato cerchio s'è adattata la retta AB = L. Ch' è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

PROP. XXI. PROB. VII.

197. *Dato qualunque cerchio, iscrivere in esso il triangolo equilatero.*

SOLUZIONE.

Fig.71 Sia ABC il cerchio dato.

1. Nel cerchio ABC si tiri qualunque diametro BD, e dal punto D s'adattino le rette DA, e DC uguali al raggio (§ *prec.*).

2. Si congiungano i tre punti A, B, C col-

colle rette AB , BC , CA .

Dico essere ABC il triangolo cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Si congiungano i raggi OA, OC . Essendo equilatero sì il triangolo AOD , che DOC ; sarà sì l' angolo AOD , che DOC un terzo di due retti . Onde ognuno delli tre angoli AOB , BOC , COA sarà $\frac{2}{3}$ di due retti . Sicchè gli angoli AOB , BOC , COA sono uguali ; e perciò uguali sono anche gli archi AB , BC , CA (§ 159) , e conseguentemente uguali le corde AB, BC. CA (§ 164) . Onde il triangolo ABC è equilatero . Per la qual cosa nel cerchio ABC s' è iscritto il triangolo equilatero ABC. Ch' è ciò , che bisognava fare , e dimostrare .

COROLLARIO I.

198. Essendo le corde AD , DC uguali , uguali saranno anche gli archi AD , DC (§ 164) ; onde l' arco AD è $\frac{1}{6}$ della periferia , e conseguentemente la corda AD è lato dell' esagono regolare iscrittibile nel cerchio ABC. Sicchè il lato dell' esagono regolare , iscrittibile in un cerchio , è uguale al raggio dell' istesso cerchio . Quindi s' iscrive l' esagono regolare in un cerchio , adattandovi in

esso intorno intorno il suo raggio.

COROLLARIO II.

199. Se ciascuno degli archi, ne' quali viene la periferia del cerchio divisa dall' esagono regolare iscritto in esso, si divide in due parti uguali, e si congiungono le corde; si ha il dodecagono regolare iscritto nell' istesso cerchio. Similmente procedendo innanzi s' avranno le figure regolari di 24, 48, 96, ec. lati iscritte nel medesimo cerchio. Sicchè dall' iscrizione nel cerchio del triangolo equilatero ne derivano le iscrizioni nel cerchio di tutte le figure regolari di 6, 12, 24, 48, 96, ec. lati.

COROLLARIO III.

200. Finalmente essendo, per l'angolo retto BAD (169), il quadrato di AB uguale al quadrato del diametro BD, o al quadruplo del quadrato del raggio DO, toltone il quadrato di AD, o di DO (§ 132); sarà il quadrato del lato del triangolo equilatero iscritto in un cerchio triplo del quadrato del raggio.

PRO-

PROP. XXII. PROBL. VIII.

201. *Dato qualunque cerchio, iſcrivere in eſſo il quadrato.*

SOLUZIONE.

Sia ABCD il cerchio dato.

1. Tirato nel cerchio il diametro AC ad arbitrio, ſi tiri l' altro BD perpendicolare ad AC. Fig. 72

2. Si congiungano le rette AB, BC, CD, DA.

Dico eſſere ABCD il quadrato cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Avendo gli angoli uguali AOB, BOC, COD, DOA i lati riſpettivamente uguali, uguali ſaranno le baſi AB, BC, CD, DA (§ 19) di eſſi. Sono di più gli angoli ABC, BCD, CDA, DAB retti, come fatti ne' mezzi cerchi (§ 169). Dunque ABCD è quadrato (§ 36). Sicchè nel dato cerchio s' è iſcritto il quadrato ABCD. Ch' è ciò, che biſognava fare, e dimoſtrare.

COROLLARIO I.

202. Se ciascuno de' quattro archi uguali, ne' quali viene divisa la periferia d' un cerchio dal quadrato iscritto in esso, si dividerà in due parti uguali, e si congiugneranno le corde; s' avrà la figura ordinata di 8 lati iscritta nell' istesso cerchio. E se poi coll' istesso metodo si procederà innanzi, s' avranno le figure ordinate di 16, 32, 64, ec. lati iscritte nel medesimo cerchio. Sicchè dalla iscrizione del quadrato nel cerchio ne derivano le iscrizioni nel cerchio delle figure ordinate di 8, 16, 32, 64, ec. lati.

COROLLARIO II.

203. Essendo il quadrato ABCD uguale alla somma de' quadrati fatti su AO, OB (§ 132), e conseguentemente il doppio del quadrato di AO; sarà il quadrato iscritto in un cerchio il doppio del quadrato del raggio.

LEMMA.

204. *Costruire un triangolo isoscele, che abbia ciascuno degli angoli alla base il doppio dell' angolo rimanente.*

Soluzione.

1. Si prenda la retta AB di qualunque lunghezza, e si divida in C in modo, che il rettangolo fatto da AB, e BC sia uguale al quadrato di AC (§ 139). Fig. 73

2. Col centro A, e coll' intervallo AB si descriva il cerchio BDF (§ 48); e, adattata in tale cerchio la retta BD = AC (§ 196); si congiunga AD.

Dico essere ABD il triangolo cercato.

Dimostrazione.

Si congiunga CD, e si descriva un cerchio, che colla sua periferia passi per gli tre punti A, C, D [§ 144]. Essendo il rettangolo fatto da AB, e BC uguale al quadrato di AC, e perciò di BD; sarà BD tangente del cerchio ACD in D [§ 188]. Onde sarà l' angolo BDC = DAC [§ 174]; e perciò, aggiuntovi di comune CDA, sarà l' intero angolo ADB uguale alla somma di CAD, CDA (§ 52). Ma DBC è uguale a BDA (§ 91); e DCB è uguale alla somma di CAD, CDA [§ 88]. Sicchè l' angolo DBC = DCB (§ 51); e perciò DC = DB (§ 93), e conseguentemente DC = CA. Per la qual cosa l' angolo CDA = CAD (§ 91). E'

anche l'angolo BDC = CAD. Sicchè l'intero angolo ADB è il doppio dell' angolo BAD; e perciò anche ABD è il doppio di BAD. S' è dunque costrutto il triangolo isoscele ABD, che ha ciascuno degli angoli alla base BD il doppio dell' angolo rimanente. Ch' è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

COROLLARIO I.

205. Avendo il triangolo BAD ciascuno degli angoli alla base BD il doppio dell' angolo BAD, sarà l' angolo BAD $\frac{1}{5}$ di due retti, o $\frac{1}{10}$ di quattro retti; e perciò l' arco BD sarà la decima parte della periferia BDF, e conseguentemente la corda BD sarà il lato del decagono regolare iscrittibile nel cerchio BDF. Sicchè se il raggio AB di qualunque cerchio BDF si divide in C in modo, che il rettangolo fatto da AB, e BC sia uguale al quadrato di AC, la porzione AC del raggio sarà il lato del decagono regolare iscrittibile nell' istesso cerchio; onde se si anderà adattando nel cerchio intorno intorno, s' avrà il decagono regolare iscritto nel cerchio.

CO-

COROLLARIO II.

206. Si prolunghi BA in H in modo, che ſia il rettangolo fatto da BH, e HA uguale al quadrato di AB. Sarà, tagliata AC = AH, il rettangolo fatto da AB, e BC uguale al quadrato di AC (§ 139); onde AC, e conſeguentemente AH ſarà il lato del decagono regolare iſcrittibile nel cerchio BDF. Sicchè ſe il raggio BA di qualunque cerchio BDF ſi prolunga in H in modo, che il rettangolo fatto da BH, e HA ſia uguale al quadrato del raggio AB, la porzione AH sarà pure il lato del decagono regolare iſcrittibile nel cerchio BDF.

COROLLARIO III.

207. Sia ABCDEF un mezzo decagono regolare iſcritto nel mezzo cerchio ACF. Si congiunga AC; e dal centro O calata OI perpendicolare ad AB, ſi congiunga BH. Sarà AC un lato del pentagono regolare; e ſarà, congiunto il raggio OC, l' angolo COI uguale all'angolo COB, una colla metà dell' angolo BOA; e perciò uguale alla metà dell' angolo COF, e conſeguentemente uguale all' angolo CAO (§ 165). Onde OC è tangente del cerchio, che colla ſua periferia paſſa per gli tre punti O, H, A Fig. 74

(§ 175) : e perciò il rettangolo fatto da AC , e CH è uguale al quadrato di OC (§ 186). In oltre , essendo ne' triangoli BIH , AIH il lato BI = IA (§ 140), il lato IH comune , e l' angolo BIH = AIH (§ 61), sarà l'angolo HBI = HAI (§ 98), e conseguentemente HBA = BCA . E perciò AB è tangente del cerchio , che colla sua periferia passa per gli tre punti C , B , H (§ 175). Sicchè il rettangolo fatto da CA , e AH è uguale al quadrato di AB (§ 186). Per la qual cosa la somma de' rettangoli fatti da AC , e CH , e da CA , ed AH , o sia il quadrato di AC (§ 120) è uguale alla somma de' quadrati fatti su OC , AB . Dunque il quadrato fatto sul lato del pentagono regolare iscrittibile in un cerchio è uguale alla somma de' quadrati fatti , uno sul lato del decagono regolare iscrittibile pure nell' istesso cerchio , e l' altro sul raggio .

PROP. XXIII. PROBL. X.

208. *Dato un cerchio , iscrivere in esso il pentagono regolare .*

SOLUZIONE.

Fig. 75 Sia ACBF il cerchio dato .

1. Si tiri qualunque diametro AB , e dal centro O s' innalzi su AB la perpendicolare OC (§ 72). 2. Si

2. Si divida il raggio OB in due parti uguali in D (§ 71) ; e , congiunta DC , col centro D , e coll' intervallo DC ſi deſcriva l' arco circolare CE (§ 48) , che interſeca AB in E.

3. Finalmente ſi congiunga CE , e s' adatti nel cerchio intorno intorno (§ 296) .

Dico che in tal modo s' avrà il pentagono cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo delle rette ED , DO la ſomma EB , e la differenza EO ; ſarà il rettangolo fatto da BE , e EO uguale alla differenza de' quadrati di ED , DO (§ 130) ; o di DC , DO , e perciò uguale al quadrato di OC (§ 132) , o di OB . Sicchè EO è il lato del decagono regolare iſcrittibile nel cerhio ACBF (§ 206) ; e conſeguentemente , eſſendo il quadrato di EC uguale alla ſomma de' quadrati di EO , OC (§ 132) , ſarà EC il lato del pentagono (§ 207) . Per la qual coſa , adattando nel cerchio ACBF intorno intorno la retta CE (§ 196) , s' avrà il pentagono cercato . Ch' è ciò , che biſognava dimoſtrare .

COROLLARIO I.

209. Eſſendo EO uguale al lato del decagono

gono regolare iſcrittibile nel cerchio ACBF; s' avrà il decagono regolare iſcritto nel cerchio ACBF con andarvi in eſſo adattando intorno intorno la retta EO.

COROLLARIO II.

210. Se ciaſcuno de' dieci archi uguali, ne' quali verrà diviſa la periferia d' un cerchio dal decagono regolare iſcritto in esso, ſi dividerà in due parti uguali, e ſi congiugneranno le corde; s' avrà la figura regolare iſcritta nell' iſteſſo cerchio di 20 lati. Se poi coll' iſteſſo metodo ſi procederà innanzi, s' avranno le figure regolari di 40, 80, 160, ec. lati iſcritte nell' iſteſſo cerchio. Sicchè dall' iſcrizione del petangono regolare nel cerchio ne derivano le iſcrizioni nel cerchio delle figure regolari di 10, 20, 40, 80, 160, ec. lati.

AVVERTIMENTO.

211. Si noti che le iſcrizioni nel cerhio di tutte le altre figure regolari, dalle già inſegnate in fuori, ſono tutte impoſſibili nella Geo. elementare, eſigendo operazioni ineſeguibili colla riga, e col compaſſo. E' poſſibile ſollamente nella detta Geo. l' iſcrizione del quindecagono regolare; e poſſibili ſono conſeguentemente le iſcrizioni delle figu-

gure regolari di 30, 60, 120, ec. lati. Perciò ſoggiugniamo la seguente

PROP. XXIV. PROBL. X.

212. *Dato qualunque cerchio, iſcrivere in eſſo il quindecagono regolare.*

SOLUZIONE.

Sia ABE il cerchio dato.

1. S' adattino nel cerchio ABE la retta AB, che ſia il lato del triangolo equilatero iſcrittibile in eſſo, e la retta AC, che ſia il lato del pentagono regolare anche iſcrittibile in eſſo (§ 196). Fig. 76

2. Si divida l'arco BC in due parti uguali in D (§ 178), e ſi congiunga BD.

3. Si vada la retta BD adattando intorno intorno nel cerchio (§ 196).

S' avrà in tal modo il quindecagono cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo l' arco AB $\frac{1}{3}$, e l' arco AC $\frac{1}{5}$ della periferia; delle 15 parti uguali, nelle quali il quindecagono regolare dee dividere la periferia, ne conterrà l' arco AB 5, e l' arco AC 3. Onde l' arco BC ne conterrà 2; e perciò BD ſarà la 15.ma parte della pe-

periferia ; e conſeguentemente la retta BD ſara il lato del quindecagono . Sicchè coll' adattare nel cerchio ACE la retta BD intorno intorno , s' avrà il quindecagono regolare iſcritto in eſſo . Ch' è ciò , che biſognava dimoſtrare .

COROLLARIO I.

213. Sicchè nella Geometria elementare è diviſibile in 3 parti uguali l' arco AC , e in 5 parti uguali l' arco AB .

COROLLARIO II.

214. Se ciaſcuno de' 15 archi uguali, ne' quali verrà diviſa la periferia d' un cerchio dal quindecagono regolare iſcritto in eſſo, ſi dividerà in due parti uguali , e ſi congiugneranno le corde ; s' avrà la figura regolare iſcritta nell' iſteſſo cerchio di 30 lati . Se poi coll' iſteſſo metodo ſi procederà innanzi , s' avranno le figure regolari di 60 , 120 , 240 , ec. lati iſcritte nel medeſimo cerchio . Sicchè dall' iſcrizione del quindecagono regolare nel cerchio ne derivano le iſcrizioni nel cerchio delle figure regolari di 30, 60, 120, 240, ec. lati .

COROLLARIO III.

215. Sono adunque iſcrittibili nel cerchio coll'

coll' ajuto della Geom. elementare ſolamente le ſeguenti figure regolari, cioè la figura regolare di 3 lati, e conſeguentemente quelle di 6, 12, 24, 48, ec. lati; la figura regolare di 4 lati, e conſeguentemente quelle di 8, 16, 32, 64, ec. lati; la figura regolare di 5 lati, e per conſeguenza quelle di 10, 20, 40, 80, ec. lati; e la figura regolare di 15 lati, e conſeguentemente quelle di 30, 60, 120, 240, ec. lati.

AVVERTIMENTO.

216. Si noti che il Renaldini non ſolamente credè possibili coll' ajuto della Geo. elementare le iſcrizioni nel cerchio di tutte le figure regolari; ma ben anche ſi luſingò d'aver trovata per tutte le iſcrizioni una regola generale. La regola è la ſeguente. Sia da iſcriverſi nel cerchio ADB qualunque figura regolare. I. Si tiri qualunque diametro AB, e ſu di eſſo ſi formi il triangolo equilatero ACB (§ 66). II. Si divida il diametro CD in tante parti uguali, quante ne dinota il numero de' lati della la figura da iſcrivere; e da C ſi tiri per l' eſtremo della ſeconda diviſione fatta nel diametro la retta CD. III. Si congiunga AD, e ſi vada nel cerchio adattando intorno intorno (§ 196). S' avrà in tal modo la Fig77.

figu-

figura iſcritta cercata. Queſta regola è vera ſolo nel caſo dell'iſcrizione del quadrato, ed in tutti gli altri caſi è falſa, come ſi può vedere nel 5º tomo de' miei elementi di Algebra. Però come l'errore del lato della figura, che ſi vuole iſcrivere, determinato colla regola data, dal lato vero è aſſai piccolo, qualora ſi tratta di cerchi piccioli, perciò ne' cerchi piccioli, ſenza commettere errore ſenſibile ſi poſſono colla regola del Renaldini fare le iſcrizioni delle figure regolari.

PROP. XXV. PROBL. XI.

217. *Dato qualunque cerchio, circoſcrivere intorno di eſſo qualſivoglia figura regolare.*

SOLUZIONE.

Sia ACD il cerchio dato.

Fig.78 1. S' iſcriva prima nel cerchio la figura ABCDE regolare dell' iſteſſo numero di lati di quella, che ſi vuole circoſcrivere, s' è possibile, nella Geom. elementare.

2. Per gli vertici di tutti gli angoli in A, B, C, D, E ſi tirino le tangenti PL, LM, MN, NO, OP (§ 155), che s' uniſcono in L, M, N, O, P.

Dico eſſere LMNOP la figura cercata,

DI

DIMOSTRAZIONE.

Dal centro Q si tirino ai vertici degli angoli della figura iscritta le rette QA, QB, QC, QD, QE, e ai vertici degli angoli della figura circoscritta le rette QL, QM, QN, QO, QP (§ 46). Essendo ne' triangoli LAQ, LBQ il lato LA = LB (§ 189), AQ = BQ, e la base LQ comune; sarà l'angolo ALQ = BLQ, e l'angolo AQL = BQL (§ 99). Sicchè LQ divide in due parti uguali sì l'angolo ALB, che AQB. Similmente si dimostra le rette QM, QN, QO, QP dividere in due parti uguali sì gli angoli BQC, CQD, DQE, EQA, che gli angoli BMC, CND, DOE, EPA. In oltre, per l'uguaglianza degli archi AB, BC, è l'angolo AQB = BQC (§ 159). Onde le metà LQB, MQB di essi sono pure uguali (§ 56). Sono anche gli angoli QBL, QBM uguali, come retti (§ 61). Dunque uguali sono pure gli angoli QLB, QMB (§ 89); e conseguentemente uguali i doppj di essi PLM, LMN. Similmente si dimostra essere l'angolo LMN = MNO, MNO = NOP, NOP = OPL. Dunque la figura LMNOP è equiangola. Finalmente, essendo i triangoli QBL, QBM equiangoli, e avendo di comune il lato QB, sarà LB = BM (§ 100). Dell'istes-

ſteſſo modo ſi dimoſtra eſſere MC = CN, ND = DO, OE = EP, PA = AL. Ma LA = LB. Dunque LP = LM (§ 56). Similmente è LM = MN, MN = NO, NO = OP. Sicchè la figura LMNOP è anche equilatera. Per la qual coſa intorno al dato cerchio s' è circoſcritta la figura LMNOP, che ſi deſiderava. Ch' è ciò, che biſognava fare, e dimoſtrare.

COROLLARIO.

218. Sicchè per circoſcrivere intorno al cerchio una figura regolare, è neceſſario prima iſcriverla. Onde ſi poſſono nella Geom. elementare circoſcrivere intorno a' cerchi ſolamente quelle figure regolari, le cui iſcrizioni ne' cerchi ſono poſſibili coll' ajuto dell' iſteſſa Geom.

PROP. XXVI. PROBL. XII.

219. *Data qualunque figura regolare, iſcrivere dentro di eſſa il cerchio.*

SOLUZIONE.

Sia LMNOP la figura regolare data.

1. Si dividano in due parti uguali due angoli qualunque PLM, LMN colle rette LQ, MQ (§ 68), le quali, prolungate, s' uniſcono in Q.

2. Da

2. Da Q ſi calino QA, QB, QC, QD, QE riſpettivamente perpendicolari a PL, LM, MN, NO, OP (§ 73).

3. Col centro Q, e coll' intervallo QA, o QB, ec. ſi deſcriva il cerchio A C D (§ 48).

Dico che ACD è il cerchio cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Si congiungano le rette QP, QO, QN. Eſſendo ne' triangoli PLQ, MLQ il lato PL = ML, il lato LQ comune, e l' angolo PLQ = MLQ; ſarà l' angolo LPQ = LMQ (§ 98). Ma LMQ è metà di LMN. Dunque LPQ è anche metà di LPO. Similmente ſi dimoſtra che QO, e QN dividono in due parti uguali gli angoli PON, ONM. In oltre ne' triangoli LAQ, LBQ l' angolo LAQ = LBQ (§ 61), ALQ = BLQ, e 'l lato LQ comune. Onde AQ = BQ (100). Coll' iſteſſo raziocinio ſi dimoſtra eſſere BQ = CQ, CQ = DQ, DQ = EQ. Sicchè tutte le rette AQ, BQ, CQ, DQ, EQ ſono tra eſſe uguali; e perciò il cerchio deſcritto paſſa colla ſua periferia per tutt' punti A, B, C, D, E, e tocca per conſeguenza tutt' i lati della figura in A, B, C, D, E. Per la qual coſa nella data figura s' è iſcritto il cerchio ACD. Ch' è ciò, che biſognava fare, e dimoſtrare.

COROLLARIO

220. Sicchè dividendo due angoli PLM, LMN di qualunque figura regolare LMNOP in due parti uguali colle rette LQ, MQ, che s' unisconо in Q; le rette tirate da Q ai vertici degli altri angoli della figura dividono quest' altri angoli anche in due parti uguali.

PROP. XXVII. PROBL. XIII.

221. *Data qualunque figura regolare, circoscrivere intorno di essa il cerchio.*

SOLUZIONE.

Sia ABCDE la figura regolare data.

1. Si dividano in due parti uguali due angoli qualunque ABG, BCD colle rette BQ, CQ (*68*), le quali prolungate s' uniſono in Q.

2. Col centro Q, e coll'intervallo QB, o QC ſi deſcriva il cerchio ACD (§ 48).

Dico che ACD è il cerchio cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Si congiungano le rette QD, QE, QA. Dividendo QB, QC gli angoli in B, e C della figura in due parti uguali, anche QD, QE,

QE, QA divideranno in due parti uguali gli angoli in D, E, A della figura (§ *prec.*). Sicchè gli angoli QAB, QBA ſono tra eſſi uguali, e conſeguentemente AQ = QB (§ 93). Similmente ſi dimoſtra eſſere QB = CQ, CQ = DQ, DQ = EQ. Onde tutte le rette QA, QB, QC, QD, QE ſono tra eſſe uguali; e perciò il cerchio deſcritto paſſa colla ſua periferia per gli vertici di tutti gli angoli in A, B, C, D E della figura. Per la qual coſa intorno la data figura s' è circoſcritto il cerchio ACD. Ch' è ciò, che bisognava fare, e dimoſtrare.

COROLLARIO.

222. Per iſcrivere dunque, e circoſcrivere il cerchio intorno a qualunque figura regolare, d' altro non v' è biſogno, ſe non ſe della diviſione di due angoli della figura in due parti uguali. Onde colla riga, e col compaſſo ſi può iſcrivere, e circoſcrivere il cerchio intorno a qualunque figura regolare.

PROP. XXVIII. PROBL. XIV.

223. *Dato il ſolo raggio d' un cerchio, determinare i lati delle figure regolari di* 3, 4, 5, 6, *e* 10 *lati, iſcrittibili coll' ajuto della Geo. elementare nell' iſteſſo cerchio.*

SOLUZIONE.

Fig. 79 Sia AB il raggio dato.

1. Dal punto B s' innalzi BC perpendicolare (§ 72), ed uguale ad AB (§ 50); e si congiunga AC.

2. Dal punto C s' innalzi CD perpendicolare ad AC, ed uguale ad AB ; e si congiunga AD.

3. Si divida AB in E in modo , che 'l rettangolo fatto da BA , ed AE sia uguale al quadrato di BE (§ 139), o si prolunghi AB in F in modo , che 'l rettangolo fatto da AF, ed FB sia uguale al quadrato di AB (§ 138); e si congiungano CE, CF.

Dico essere AB il lato dell' esagono, AC del quadrato, AD del triangolo , BE , o BF del decagono, e CE , o CF del pentagono.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo AB il raggio , sarà AB il lato dell' esagono (§ 198). In oltre , essendo il quadrato di AC uguale alla somma de' quadrati fatti su AB, BC (§ 132), e perciò doppio del quadrato del raggio AB ; sarà AC lato del quadrato (§ 203). Di più , essendo il quadrato di AD uguale alla somma de' quadrati fatti su AC, CD (§ 132), e perciò triplo del quadrato del raggio AB ;

AB ; ſarà AD lato del triangolo equilatero (§ 200). Eſſendo di vantaggio il rettangolo fatto da BA , ed AE uguale al quadrato di BE , o 'l rettangolo fatto da AF , ed FB uguale al quadrato di AB ; ſarà BE (§ 205), o BF (§ 206) lato del decagono. Finalmente , eſſendo il quadrato di CE, o di CF uguale alla ſomma de' quadrati fatti ſu EB , BC , o ſu FB , BC (§ 132); ſarà EC , o CF lato del pentangono (§ 207). Ch' è quanto biſognava dimoſtrare.

AVVERTIMENTO.

224. Per quanto s' è fin qui dimoſtrato ; è facile a calcolare i lati delle dette figure regolari relativamente al raggio di qualunque cerchio . Sia per eſempio il raggio OC di 100 palmi . Sara il quadrato iſcritto nell' iſteſſo cerchio di 20000 palmi quadrati ; onde il ſuo lato ſarà di palmi 141. 4 , radice di 20000 . Sarà in oltre il quadrato del lato del triangolo equilatero di 30000 palmi quadrati ; onde il lato ſarà di pal. 173. 2 , radice di 30000 . Di più , eſſendo OD = 50 , e OC = 100 , ſarà il quadrato di DC = 12500; onde la ſua radice 111. 3 dà DC , o ſia DE ; e perciò EO , o ſia il lato del decagono = 61. 3 . Finalmente , eſſendo OC = 100 , ed EO = 61. 3 ; ſarà il quadrato di EC = 13757. 69 ; onde la ſua radice 117. 2 dà il lato del pentagono . Sicchè , Fig. 75

posto il raggio = 100, sono il lato del triangolo = 173. 2, il lato del quadrato = 141. 4, il lato del pentagono = 117. 2, il lato dell' esagono = 100, e 'l lato del decagono = 61. 3.

Fine del secondo Libro.

LI-

LIBRO III.

Della dottrina della Ragione, e Proporzione geometrica.

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

DEFINIZIONE I.

225. Due grandezze si dicono *omogenee*, se sono uguali, o possono divenirle coll' accrescere l' una, o col diminuire l' altra; si dicono poi *eterogenee*, se non hanno uguaglianza, nè possono acquistarla, qualunque accrescimento si dia all' una, o diminuzione all' altra.

Così grandezze omogenee sono e tutte le linee tra esse, e tutte le superficie tra esse, e tutt' i solidi tra essi, e tutt' i moti tra essi, e tutte le velocità de' corpi tra esse, e tutte le forze de' corpi tra esse, ec.:

ſono poi eterogenee una linea, e un ſolido; una ſuperficie, e un moto, ec.,

DEFINIZIONE II.

226. Se due grandezze omogenee ſono diſuguali, ſi dicono la minore *parte* della maggiore, e la maggiore *moltiplice* della minore. E ſe la minore miſura eſattamente la maggiore, ſi dicono la minore *parte aliquota* della maggiore, e la maggiore *moltiplice aliquoto* della minore. Se poi la minore non miſura con eſattezza la maggiore; ſi chiamano allora la minore *parte aliquanta* della maggiore, e la maggiore *moltiplice aliquanto* della minore.

Così del 15 *il* 3 *è parte aliquota, e'l* 4 *parte aliquanta; e del* 3 *il* 15 *è moltiplice aliquoto, e'l* 16 *moltiplice aliquanto.*

DEFINIZIONE III.

227. Se una grandezza minore miſura eſattamente più grandezze maggiori, ſi dice la minore *parte aliquota comune* di tutte le maggiori. Se poi una grandezza maggiore viene eſattamente miſurata da più grandezze minori, la maggiore ſi dice *moltiplice aliquoto comune* di tutte le minori.

Così il 2 *è parte aliquota comune di* 4, 6, 8, 10; *e'l* 12 *è moltiplice aliquoto comune di* 2, 3, 4, 6.

AV-

AVVERTIMENTO I.

228. Si noti che due grandezze omogenee poſſono avere un' aliquota comune finita, cioè che le miſura un numero finito di volte, e poſſono non averne alcuna; perchè ſi può dare il caſo che la decima, o centeſima, o milleſima, o altra parte finita dell' una ſia miſura eſatta dell' altra; e ſi può anche dare il caſo che non ſia miſura eſatta dell' una nè la decima, nè la centeſima, nè la milleſima, nè altra parte finita dell' altra. Nel primo caſo le grandezze ſi dicono *grandezze commenſurabili*, e nell' altro *grandezze incommenſurabili*. Però ancorchè due grandezze incommenſurabili non abbiano un' aliquota comune finita: nondimeno poſſiamo ſempre idearci di eſſe un' aliquota comune infinitamente piccola. Imperciocchè una parte aliquota infinitamente picciola di una deve eſſere anche parte aliquota dell' altra, o parte aliquota d' una grandezza, che ſi potrà prendere per l' altra ſenza errore ſenſibile.

AVVERTIMENTO II.

229. Si noti pure che di qualunque numero di grandezze omogenee vi dee ſempre eſſere, o poſſiamo ſempre idearci un' aliquota comune. Contraſſegnino A, B, C, D,

D, E, ec. più grandezze omogenee. Avendo sempre due grandezze omogenee, o potendoci sempre di due grandezze omogenee almeno ideare un' aliquota comune; se contrassegneremo con L l' aliquota comune di A, e B, con M l' aliquota comune di L, e C, con N l' aliquota comune di M, e D, con O l' aliquota comune di N, ed E, ec.; saranno delle grandezze A, B, C l' aliquota comune M, delle grandezze A, B, C, D l' aliquota comune N, delle grandezze A, B, C, D, E l'aliquota comune O, ec..

DEFINIZIONE IV.

230. Se due, o più grandezze minori misurano esattamente, ed ugual numero di volte altrettante grandezze maggiori, si dicono le minori *parti aliquote simili* delle maggiori, e le maggiori *moltiplici simili*, o *ugualmente moltiplici* delle minori.

Così 2, 3, 4 *sono parti aliquote simili di* 8, 12, 16; 8, 12, 16 *sono moltiplici simili di* 2, 3, 4.

COROLLARIO.

231. Quindi due, o più grandezze, omogenee, o eterogenee che sieno, possono avere infinite diverse aliquote simili; perchè possono avere infinite parti come le metà di esse, le terze parti, le quarte parti, e co-

così procedendo all' infinito, che le misurino esattamente, ed ugual numero di volte.

DEFINIZIONE V.

232. *Ragione* si dice il paragone di due grandezze omogenee, fatto circa la quantità di esse. Le grandezze si dicono *termini* della ragione; e con ispezialità quella, che si paragona, si dice *antecedente*, e l' altra, con cui si fa il paragone, si chiama *conseguente*.

AVVERTIMENTO

233. Si possono due grandezze omogenee paragonare circa la quantità di esse, o osservando quante volte l' una contiene l' altra, o osservando di quanto l' una eccede l' altra. Quindi è derivata la distinzione della ragione in *ragione geometrica*, e in *ragione aritmetica*.

DEFINIZIONE VI.

234. La ragione si dice *geometrica*, se le grandezze si paragonano osservando quante volte l' antecedente contiene il conseguente, si dice poi *aritmetica*, se il paragone si fa osservando di quanto l' antecedente eccede il conseguente.

AV-

AVVERTIMENTO.

235. Si noti che ſe A, e B contraſſegnano due grandezze omogenee, la ragione di eſſe ſi noterà o ſcrivendo: *ragione di A a B*, o ſcrivendo: *ragione di A : B*; e ſi profferirà ſempre dicendo: *ragione di A a B*. Si noti altresì che tratteremo qui della ſola ragione geometrica, avendo eſſa ſola luogo nella Geo. elementare; onde col vocabolo ragione intenderemo appreſſo ſempre la ragione geometrica.

DEFINIZIONE VII.

236. Si chiama *quantità*, *eſponente*, o *denominatore* della ragione il numero, che dinota quante volte l' antecedente contiene il conſeguente.

COROLLARIO I.

237. Conſiſtendo la ragione nel paragone di due grandezze omogenee, fatto con oſſervare quante volte l' antecedente contiene il conſeguente; allora ſi conoſcerà, e ſi determinerà la vera ragione di due grandezze; quando ſi conoſcerà con eſattezza quante volte l' antecedente conterrà il conſeguente.

AV-

AVVERTIMENTO I.

238. Si noti che si può conoscere quante volte una grandezza contiene un' altra, e conseguentemente si può conoscere, e determinare la vera ragione di due grandezze, se o una è aliquota finita dell' altra, o ambedue hanno un aliquota comune finita; cioè se le grandezze sono commensurabili. In fatti se di due grandezze omogenee una misura l' altra con esattezza 5 volte, si conosce allora avere la maggiore alla minore la ragione di 5 : 1, e la minore alla maggiore la ragione di 1 : 5; e in tal caso la quantità della prima ragione è 5, e quella della seconda è $\frac{1}{5}$. E se due altre grandezze hanno un' aliquota comune, la quale misura la maggiore 11 volte, e la minore 7 volte; si conosce pure avere la maggiore alla minore la ragione di 11 : 7, e la minore alla maggiore la ragione di 7 : 11; e in tale altro caso la quantità della prima ragione è $\frac{11}{7}$, e quella della seconda è $\frac{7}{11}$. L' istesso non è delle grandezze incommensurabili; perchè di queste, benchè si possa sempre immaginare un' aliquota comune infinitamente picciola, non potendosi però esprimere l' infinito numero delle parti dell' una, e l' infinito numero delle parti dell' altra, che uguagliano l' aliquota comune di esse, non si potrà mai nè conoscere, nè de-

determinare la vera ragione.

COROLLARIO II.

239. Dunque la vera ragione di due grandezze omogenee si può conoscere, e determinare, se le grandezze sono commensurabili, e non già se sono incommensurabili.

AVVERTIMENTO II.

240. Si noti intanto che sebbene di due grandezze incommensurabili, che per chiarezza chiamo A e B, non se ne possa sapere la vera ragione; si può però conoscerne una ragione prossima alla vera a questo modo si prenda una parte aliquota finita di A, che sia la più piccola che si possa comodamente prendere, e s' esplori quante volte misura l' altra B. Sebbene la detta parte non possa esattamente misurare B, misura però esattamente una grandezza, che si può prendere per la grandezza B senza errore assai sensibile. Or se la detta parte è la 10000ma di A, e misura 14723 volte la grandezza B; si dirà avere la grandezza A alla grandezza B a un di presso la ragione di 10000 : 14723.

DE-

DEFINIZIONE VIII.

241. La ragione di due grandezze ſi dice *razionale*, ſe eſſa ſi può con eſattezza determinare; ſi dice poi *irrazionale*, ſe ſi può determinare ſolamente a un di preſſo.

COROLLARIO.

242. Sicchè la ragione delle grandezze commenſurabili è razionale, e quella delle incommenſurabili è irrazionale.

DEFINIZIONE IX.

243. Si dicono *ragioni uguali* quelle, che hanno quantità uguali. Si dicono poi *ragioni diſuguali* quelle, che hanno quantità diſuguali; e ſpezialmente ſi dice *ragione maggiore* quella, la cui quantità è maggiore.

COROLLARIO I.

244. Sicchè quando due ragioni ſono uguali, gli antecedenti ſono ambidue maggiori, uguali, o minori riſpettivamente de' conſeguenti.

COROLLARIO II.

245. Se le quantità di due ragioni ſono uguali alla quantità d' una terza ragione, tali quantità ſono anche uguali tra eſſe (§51); e ſe le quantità di due ragioni ſono uguali tra eſſe, e la quantità d' una di eſſe è maggiore, o minore della quantità d' una terza ragione, ſarà la quantità dell' altra ragione maggiore, o minore ancora della quantità della terza (§ 51). Dunque ſe due ragioni ſono uguali a una terza, ſono anche uguali tra eſſe; e ſe due ragioni ſono uguali tra eſſe, ed una di eſſe è maggiore, o minore d' una terza, l' altra è anche maggiore, o minore dell' iſteſſa terza.

DEFINIZIONE X.

246. Una ragione ſi dice *ſemplice*, s' è il paragone di due ſole grandezze; ſi dice poi *compoſta*, ſe la ſua quantità è il prodotto delle quantità di più ragioni ſemplici.

Così ſe ſaranno le ragioni ſemplici di 2: 1, *di* 6: 2, *di* 12: 3, *perchè le quantità di eſſe ſono* 2, 3, 4, *e 'l prodotto di tali quantità è* 24; *ſi dirà ogni ragione, che ha per quantità il* 24, *come la ragione di* 24: 1, *quella di* 48: 2, *quella di* 72: 3, *ec. compoſta dalle ragioni di* 2: 1, *di* 6: 2, *di* 12: 3.

DE-

DEFINIZIONE XI.

247. Una ragione composta da più ragioni uguali si dice *duplicata*, *triplicata*, *quadruplicata*, ec. di ciascuna delle ragioni componenti, secondochè il numero delle componenti è 2, 3, 4, ec.

DEFINIZIONE XII.

248. La ragione del conseguente all' antecedente in ogni ragione si dice *reciproca* di quella dell'antecedente al conseguente.

Così della ragione di A: B la reciproca è quella di B: A.

DEFINIZIONE XIII.

249. Se si considera la ragione di A : B relativamente a quella di C: D, si dirà la ragione di A : B essere *diretta* della ragione di C : D, se quella di A : B sarà uguale alla ragione di C : D; si dirà poi la ragione di A : B essere *reciproca* della ragione di C : D, se la ragione di A : B sarà uguale alla ragione D : C.

DEFINIZIONE XIV.

250. Si dice *proporzione geometrica* l'uguaglianza di due ragioni geometriche.

AVVERTIMENTO.

251. Si noti che tra le due ragioni uguali d' ogni proporzione geometrica s' intramette il ſegno dell' uguaglianza (==). Onde ſi ſcrive la proporzione geometrica a queſto modo A : B = C : D , e ſi profferiſce dicendo A ſta al B, come il C al D.

COROLLARIO I.

252. Eſſendo la proporzione formata da due ragioni uguali , ſaranno il primo , e 'l terzo termine ambidue o maggiori , o uguali, o minori riſpettivamente degli altri due.

COROLLARIO II.

153. Potendo eſſere due ragioni geometriche uguali tra eſſe , ancorchè le grandezze dell' una ſieno eterogenee colle grandezze dell' altra : ne ſegue che nella proporzione geometrica poſſono eſſere le grandezze d' una ragione omogenee colle grandezze dell' altra , e poſſono anch' eſſere eterogenee.

DEFINIZIONE XV.

254. La proporzione geometrica ſi dice *diſcreta*, ſe viene compoſta da quattro grandezze tra eſſe diverſe ; ſi dice poi *continua* , se

se viene composta da tre, e quella di mezzo è conseguente nella prima ragione, e antecedente nella seconda.

Così A : B = C : D si dice proporzione discreta, e continua A : B = B : C.

DEFINIZIONE XVI.

255. Le grandezze, che formano la proporzione, si dicono *grandezze proporzionali*: quella di mezzo nella proporzione continua si dice la *mezza proporzionale*: i due antecedenti si dicono tra essi *grandezze omologhe*, e i due conseguenti si dicono pure tra essi *grandezze omologhe*.

AVVERTIMENTO.

256. Si noti che, risguardando la dottrina delle ragioni, e proporzioni tutte le spezie di grandezze, le linee, di cui faremo uso in sì fatta dottrina, faranno le veci di caratteri generali; onde contrassegneremo con esse non le sole lunghezze, ma grandezze d'ogni sorta.

CAP. I.

De' caratteri da conoſcere l' uguaglianza, e la diſuguaglianza delle ragioni; e dell' uſo di tali caratteri in determinare di quali grandezze le ragioni ſono uguali, e di quali ſono diſuguali.

PROP. I. TEOR. I.

257. *Due ragioni ſono uguali, ſe le aliquote ſimili de' conſeguenti ſono aliquote ſimili pure degli antecedenti.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 80 Sieno nelle due ragioni di A : B, e di C : D le grandezze L, ed M aliquote ſimili sì de' conſeguenti B, e D, che degli antecedenti A, e C. E poichè la ragione di A : B è l'iſteſſa di quella del numero delle parti di A, che uguagliano L, al numero delle parti di B, che pure uguagliano L; e la ragione di C : D è l'iſteſſa di quella del numero delle parti di C, che ugualiano M, al numero delle parti di D, che

che pure uguagliano M. Dunque essendo gli stessi i numeri delle parti di A, e C, che uguagliano rispettivamente L, ed M, e gli stessi i numeri delle parti di B, e D, che pure uguagliano rispettivamente L, e M; la quantità della ragione di A : B sarà l' istessa della quantità della ragione di C : D. E perciò la ragione di A : B è uguale alla ragione di C : D (§ 243). Ch' è ciò che bisognava dimostrare.

PROP. II. TEOR. II.

258. *Se L, ed M sono aliquote simili de' conseguenti B, e D, e non già degli antecedenti A, e C, ed L misura più volte A di quello M misura il C; sarà la ragione di A : B maggiore della ragione di C : D.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè la ragione di A : B è l'istessa di quella del numero delle parti di A, che uguagliano L, al numero delle parti di B, che pure uguagliano L. Similmente la ragione di C : D è l' istessa di quella del numero delle parti di C, che uguagliano M, al numero delle parti di D, che uguagliano anche M. Ma, ancorchè i numeri delle parti di B, e D; che uguagliano rispettivamente L, ed M sieno gli stessi, il numero però delle parti di A, che ugua-

gliano L, è maggiore del numero delle parti di C, che uguagliano M. Dunque la quantità della ragione di A : B è maggiore della quantità della ragione di C : D. E perciò la ragione di A : B è maggiore della ragione di C : D (§ 243). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. III. TEOR. III.

259. *Sia la ragione di A : B uguale alla ragione di C : D. Dico che tra le infinite diverse aliquote simili, che possono avere i conseguenti, ve ne debbono essere di quelle, che si possono prendere per aliquote degli antecedenti, e tali aliquote si debbono prendere ancora per aliquote simili de' medesimi antecedenti.*

DIMOSTRAZIONE.

Potendo avere B, e D infinite diverse aliquote simili (§ 231), possono avere anche delle aliquote simili infinitamente picciole. Dunque B, e D possono avere aliquote simili, che si possono prendere per aliquote di A, e C (§ 228). Si concepisca che L, ed M sieno sì fatte aliquote. Se L, ed M non sono aliquote simili di A, e C, la ragione di A : B non è uguale a quella di C : D (§ 258). Ma ciò ripugna all'ipotesi. Dunque L, ed M, che si possono prendere per aliquote di A, e C, si debbono prendere an-

anche per aliquote ſimili di A, e C. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. IV. TEOR. IV.

260. *Sia la ragione di A : B maggiore di quella di C : D. Dico che tra le infinite diverſe aliquote ſimili, che poſſono avere i conſeguenti B, e D, ve ne debbono eſſere di quelle, che ſi poſſono prendere per aliquote di A, e C, e sì fatte aliquote debbono eſſere tali, che l' una dee miſuare più volte A di quello l' altra miſura il C.*

DIMOSTRAZIONE.

Potendo avere B, e D infinite diverſe aliquote ſimili (§ 231), poſſono avere anche delle aliquote ſimili infinitamente picciole. Dunque B, e D poſſono avere aliquote ſimili, che ſi poſſono prendere per aliquote di A, e C (§ 228). Si concepiſca che L, e M ſieno sì fatte aliquote. Se L non miſura più volte A di quello M miſura il C, miſurerà L l' iſteſſo, o minor numero di volte A di quello M miſura il C. Onde la ragione di A : B è o uguale alla ragione di C : D (§ 257), o minore dell' iſteſſa ragione di C : D (§ 258). Ma ambedue tali coſe ripugnano all'ipoteſi. Dunque L dee miſurare più volte A di quello M miſura il C. Sicchè delle grandezze L,

ed M, che si possono prendere per aliquote di A, e C, più volte L misura A di quello M misura il C. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

AVVERTIMENTO.

261. Posti i caratteri da conoscere l'uguaglianza, e la disuguaglianza di due ragioni, e poste le converse di tali caratteri; procediamo ora a vedere di quali grandezze le ragioni sono uguali, e di quali sono disuguali.

PROP. V. TEOR. V.

262. *Se due grandezze uguali si paragonano con una terza omogenea, le due grandezze hanno ragioni uguali alla terza, e la terza ha ragioni uguali alle due grandezze.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 81 Sieno A, e B le due grandezze uguali, e C sia la terza omogenea. S'intenda essere L aliquota comune di A, e C. Essendo A = B, misurerà L tante volte A, quante volte misura B. Onde L, e L sono aliquote simili sì di A, e B, che di C, e C. E perciò la ragione di A : C è uguale alla ragione di B : C, e la ragione di C : A è uguale a quella di C : B (§ 257). Ch' è ciò

ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. VI. TEOR. VI.

263. *Se due grandezze disuguali si paragonano con una terza omogenea, la ragione della grandezza maggiore alla terza è maggiore della ragione della minore all' istessa terza; e all' opposto la ragione della terza alla minore è maggiore della ragione dell' istessa terza alla maggiore.*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno A, e B due grandezze disuguali, Fig.82
ed A sia maggiore di B, e C sia la terza omogenea.

I. S' intenda essere L aliquota comune di A, B, C. Essendo A maggiore di B, misurerà L più volte A, che B. Dunque L, ed L sono aliquote simili di C, e C, e non già di A, e B; e, misurando L più volte A, che B, sarà la ragione di A : C maggiore della ragione di B : C (§ 258).

II. S' intendano essere L, e M aliquote simili di A, e B, ed aliquote di C. Essendo A maggiore di B, sarà L maggiore anche di M. Onde M misurerà più volte C di quello L misura l' istessa C. Dunque M, ed L sono aliquote simili di B, ed A, e non già di C, e C; e, misurando M più volte C di quello L misura l' istessa C, sarà la ra-

ragione di C : B maggiore della ragione di C : A (§ 258) . Ch' è quanto biſognava dimoſtrare .

PROP. VII. TEOR. VII.

264. *Le grandezze , che hanno uguali ragioni a una terza , ſono uguali tra eſſe ; e le grandezze , alle quali una terza ha uguali ragioni , ſono tra eſſe anche uguali .*

DIMOSTRAZIONE.

Fig.81 I. Sia la ragione di A : C uguale alla ragione di B : C . Se non è A = B , ſarà A maggiore , o minore di B . Dunque la ragione di A : C è maggiore , o minore di quella di B : C (§ 263) . Ma ciò ripugna all' ipoteſi . Dunque ripugna non eſſere A = B ; e perciò A = B .

II. Sia la ragione di C : A uguale alla ragione di C : B . Se non è A = B , ſarà A maggiore , o minore di B . Dunque la ragione di C : A è minore , o maggiore di quella di C : B (§ 263) . Ma ciò ripugna all' ipoteſi . Sicchè ripugna non eſſere A = B ; e perciò è A = B . Ch' è quanto biſognava dimoſtrare .

PROP.

PROP. VIII. TEOR. VIII.

265. *Sia la ragione di A: C maggiore della ragione di B: C. Dico che A è maggiore di B. Sia in oltre la ragione di C: B maggiore di quella di C: A. Dico pure che A è maggiore di B.* Fig. 82

DIMOSTRAZIONE.

I. Se si niega essere A maggiore di B, sarà A uguale, o minore di B. Dunque la ragione di A: C è uguale (§ 262), o minore della ragione di B: C (§ 263). Ma ciò ripugna all' ipotesi. Dunque ripugna non essere A maggiore di B; e perciò è A maggiore di B.

II. Se si niega pure essere A maggiore di B, sarà A uguale, o minore di B. Dunque la ragione di C: B è uguale alla ragione di C: A (§ 262), o minore della ragione di C: A (§ 263). Ma anche ciò ripugna all' ipotesi. Sicchè ripugna non essere A maggiore di B; e perciò è A maggiore di B. Ch' è quanto bisognava dimostrare.

CAP.

CAP. II.

Della dottrina della Ragione compoſta.

PROP. IX. TEOR. IX.

Fig. 83 *266. Sieno le ragioni di A: B, di C: D, di E: F, ec. riſpettivamente maggiori, uguali, o minori delle ragioni di L: M, di N: O, di P: Q, ec.. Dico eſſere la ragione compoſta dalle prime maggiore, uguale, o minore della ragione compoſta dalle ſeconde.*

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo le ragioni di A: B, di C: D, di E: F riſpettivamente maggiori, uguali, o minori delle ragioni di L: M, di N: O, di P: Q, i numeri, ch' eſprimeranno le quantità delle prime ſaranno maggiori, uguali, o minori riſpettivamente de' numeri, ch' eſprimeranno le quantità delle ſeconde. Onde il prodotto delle quantità delle prime ragioni ſarà maggiore, uguale, o minore del prodotto delle quantità delle ragioni ſeconde. E perciò la compoſta dalle ragioni di A: B, di C: D, di E: F ſarà maggiore, uguale, o minore della compoſta dalle ragioni di L: M, di N: O,

di

di P : Q (§ 243). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. X. TEOR. X.

167. *Sieno A, B, C tre grandezze omogenee qualunque. Dico eſſere la ragione di A : C compoſta dalle ragioni di A : B, e di B : C.*

DIMOSTRAZIONE.

Rappreſentino L, M, N i numeri eſprimenti le grandezze A, B, C relativamente a una aliquota comune di eſſe; eſprimeranno il rotto $\frac{L}{M}$ la quantità della ragione di A : B, e 'l rotto $\frac{M}{N}$ la quantità della ragione di B : C. Onde il prodotto $\frac{L}{M} \times \frac{M}{N}$ eſprimerà la quantità della compoſta dalle ragioni di A : B, e di B : C (§ 246). Ma sì fatto prodotto è uguale al rotto $\frac{L}{N}$, ovvero alla quantità della ragione di A : C. Dunque la ragione di A : C è compoſta dalle ragioni di A : B, e di B : C (§ 246). Ch'è ciò, chè biſognava dimoſtrare.

CO-

COROLLARIO I.

268. Sieno A, B, C, D, E, ec. grandezze tutte omogenee. Eſſendo la ragione di A : E compoſta dalle ragioni di A : D, e di D : E, quella di A : D compoſta dalle ragioni di A : C, e di C : D, e quella di A : C compoſta dalle ragioni di A : B, e di B: C; ſarà la ragione di A: E compoſta da tutte le ragioni di A : B, di B: C, di C: D, e di D: E. Sicchè ſe tra due grandezze omogenee ſe ne intramettono quante altre ſe ne vogliono, e di qualunque grandezza, la ragione della prima all' ultima è ſempre compoſta da tutte le ragioni della prima alla ſeconda, della ſeconda alla terza, della terza alla quarta, e così procedendo fino all' ultima.

COROLLARIO II.

269. Quindi ſe A, B, C, D, E, ec. ſaranno continuamente proporzionali, la ragione della prima A alla terza C ſarà compoſta dalle due ragioni uguali di A: B, e di B: C, e perciò ſarà duplicata d' una di eſſe; la ragione della prima A alla quarta D ſarà compoſta dalle tre ragioni uguali di A: B, di B: C, e di C: D, e perciò ſarà triplicata di ciaſcuna di eſſe; la ragione della prima A alla quinta E ſarà compo-

po-

posta dalle quattro ragioni uguali di A : B, di B : C, di C : D, e di D : E, e perciò sarà quadruplicata di ciascuna di esse (§ 147); e così procedendo all' infinito.

PROP. XI. TEOR. XI.

270. *Se la ragione di A : B è maggiore, uguale, o minore della ragione di L : M, la duplicata, la triplicata, la quadruplicata, ec. di quella sono anche maggiori, uguali, o minori rispettivamente della duplicata, della triplicata, della quadruplicata, ec. di questa.*

DIMOSTRAZIONE.

Essendo la ragione di A : B maggiore, uguale, o minore della ragione di L : M; saranno le componenti della duplicata, della triplicata, della quadruplicata, ec. di quella di A : B maggiori, uguali, o minori delle componenti della duplicata, della triplicata, della quadruplicata, ec. della ragione di L : M. Dunque la duplicata, la triplicata, la quadruplicata, ec. della ragione di A : B sono anche rispettivamente maggiori, uguali, o minori della duplicata, della triplicata, della quadruplicata, ec. della ragione di L : M (§ 266). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP.

PROP. XII. TEOR. XII.

271. *Se le duplicate , triplicate , quadruplicate , ec. delle ragioni di A : B , e di L : M ſono riſpettivamente uguali , anche le ragioni di A : B , e di L : M ſono tra eſſe uguali .*

DIMOSTRAZIONE.

Se ſi niega eſſere la ragione di A : B uguale a quella di L : M ; ſarà la ragione di A : B maggiore , o minore della ragione di L : M . Dunque la duplicata , la triplicata , la quadruplicata , ec. della ragione di A : B ſaranno maggiori , o minori riſpettivamente della duplicata , della triplicata , della quadruplicata , ec. di quella di L : M (§ *prec.*) . Ma ciò ripugna all' ipoteſi . Dunque ripugna non eſſere le ragioni di A : B , e di L : M uguali tra eſſe . Sicchè le ragioni di A : B e di L : M ſono uguali . Ch'è ciò , che biſognava dimoſtrare .

CAP.

CAP. III.

Delle principali trasformazioni, che ſi poſſono fare nelle due ragioni di qualſiſia proporzione geometrica, ſenza togliere la proporzione.

DEFINIZIONE.

272. Si dice che una ragione s' *inverte*, quando ſi paragona il ſuo conſeguente coll' antecedente: che ſi *compone*, quando ſi paragona la ſomma dell' antecedente, e conſeguente coll' iſteſſo conſeguente: che ſi *divide*, quando ſi paragona l' eccesſo dell' antecedente ſul conſeguente coll' iſteſſo conſeguente: e finalmente che ſi *converte*, quando ſi paragona l' antecedente coll' eccesſo dell' antecedente ſul conſeguente.

Così della ragione di A : B s' avranno, invertendo, la ragione di B : A, componendo, la ragione di A + B : B, dividendo, la ragione dell' eccesſo di A ſul B al B, convertendo, la ragione di A all' eccesſo di A ſul B,

PROP. XIII. TEOR. XIII.

273. *Se quattro grandezze ſono proporzionali,*

nali , invertendo le due ragioni , ſi hanno grandezze anche proporzionali .

DIMOSTRAZIONE.

Fig.80 Sia A : B = C : D . S' intenda che L , ed M ſieno le aliquote ſimili di B , e D , che ſi poſſono prendere per aliquote ſimili ancora di A , e C (§ 259 . Dunque , preſe A , e C per conſeguenti , e B , e D per antecedenti , le aliquote ſimili L , e M de' conſeguenti A , e C ſono aliquote ſimili ancora degli antecedenti B , e D . Perciò B : A = D : C (§ 257). Ch' è ciò , che biſognava dimoſtrare .

PROP. XIV. TEOR. XIV.

Fig.84 274. *Sia AB : BC = DE : EF . Dico che, componendo , ſia AC : CB = DF : FE .*

DIMOSTRAZIONE.

S' intendano eſſere L , ed M le aliquote ſimili di BC , EF , che ſi poſſono prendere anche per aliquote ſimili di AB , DE (§ 259) . Miſurando L , ed M riſpettivamente un' iſteſſo numero di volte AB , DE , e un' iſteſſo numero di volte BC , EF ; miſureranno ancora L , ed M l'iſteſſo numero di volte AC , DF . Dunque L , ed M ſono aliquote ſimili sì di BC , EF , che di AC , DF .

DF. E perciò AC : CB = DF : FE (§ 257). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XV. TEOR. XV.

275. *Sia AC : CB = DF : FE. Dico che, dividendo, sarà AB : BC = DE : EF.*

DIMOSTRAZIONE.

S' intendano essere L, ed M le aliquote simili di BC, ed EF, che si possono anche prendere per aliquote simili di AC, e DF. Misurando L, ed M rispettivamente un' istesso numero di volte BC, EF, e un' istesso numero di volte AC, DF; misureranno ancora L, ed M l' istesso numero di volte AB, DE. Dunque L, ed M sono aliquote simili sì di BC, ed EF, che di AB, e DE. E perciò AB : BC = DE : EF (§ 257). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XVI. TEOR. XVI.

276. *Sia AB : BC = DE : EF. Dico essere ancora AB : AC = DE : DF.*

DIMOSTRAZIONE.

Essendo AB : BC = DE : EF; sarà, invertendo, CB : BA = FE : ED (§ 173); e, componendo, CA : AB = FD : DE (§

274). Onde, di nuovo invertendo, sarà AB : AC = DE : DF. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XVII. TEOR. XVII.

277. *Sia AC : CB = DF : FE. Dico che, convertendo, sarà CA : AB = FD : DE.*

DIMOSTRAZIONE.

Essendo AC : CB = DF : FE; dividendo, sarà AB : BC = DE : EF (§ 275); onde AB : AC = DE : DF (§ *prec.*); e, invertendo, sarà CA : AB = FD : DE. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

CAP. IV.

Delle proprietà della proporzione, che ha tutti i termini omogenei.

DEFINIZIONE.

278. Si dirà che i termini d'una proporzione si *permutano*, quando si paragona l'antecedente coll'antecedente, e 'l conseguente col conseguente.

PROP.

PROP. XVIII. TEOR. XVIII.

279. *Sieno nella proporzione* $A : B = C : D$ *tutt' i termini omogenei. Dico che, permutando, ſarà* $A : C = B : D$. Fig. 80

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè la ragione di A : C è compoſta dalle ragioni di A : B, e di B : C, e la ragione di B : D è compoſta dalle ragioni di B : C, e di C : D (§ 267). Ma le componenti dell' una, cioè le ragioni di A : B, e di B : C, ſono uguali alle componenti dell' altra, cioè alle ragioni di B : C, e di C : D. Sicchè le compoſte, cioè le ragioni di A : C, e di B : D ſono anche uguali (§ 266). Per la qual coſa A : C = B : D. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO I.

280. Sieno A, e C due grandezze omogenee, ed L, e M ſieno aliquote ſimili di eſſe; ſaranno A, C, L, M tutte grandezze omogenee, e ſaranno le ragioni di A : L, e di C : M uguali (§ 257). E perciò A : L = C : M. Onde, permutando, ſarà A : C = L : M. Sicchè le grandezze omogenee hanno tra eſſe l' iſteſſa ragione delle parti aliquote ſimili.

COROLLARIO II.

281. Sieno in oltre A, B, C, D quattro grandezze omogenee proporzionali, ed A ſia la maſſima. Eſſendo A : B = C : D, ed A : C = B : D; ed eſſendo nella prima di tali proporzioni B minore di A, ſarà D minore di C; e nella ſeconda C minore di A, ſarà D minore di B (§ 252). Dunque ſe A è la maſſima, D è la minima.

PROP. XIX. TEOR. XIX.

Fig.85 282. *Sieno AB, CD, E, F quattro grandezze omogenee proporzionali, e AB ſia la maſſima. Dico eſſere la ſomma della maſſima AB, e della minima F maggiore della ſomma delle altre due CD, ed E.*

DIMOSTRAZIONE.

Da AB ſi tagli AG = E, e da CD ſi tagli CH = F. Eſſendo per l' ipoteſi AB ; CD = E : F, ſarà AB : CD = AG : GH: e, permutando, ſarà AB : AG = CD : CH (§ 279). Sicchè, convertendo, ſarà pure AB : BG = CD : DH (§ 277). Ma per l' ipoteſi è AB maggiore di CD. Dunque BG è maggiore di DH (§ 252). E perciò, aggiugnendo alla maggiore GB la ſomma di AG, ed F, e alla minore DH la ſomma

ma di E, e CH, sarà la somma di AB, ed F maggiore della somma di CD, ed E (§ 54). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XX. TEOR. XX.

283. *Sia AB : DE = BC : FE. Dico che sarà ancora AC : DF = AB : DE = BC : EF.* Fig. 84

DIMOSTRAZIONE.

Essendo AB : DE = BC : EF; sarà, permutando, AB : BC = DE : EF (§ 279), e componendo AC : CB = DF : FE (§ 274); e, di nuovo permutando, AC : DF = BC : EF, e perciò anche AC : DF = AB : DE. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XXI. TEOR. XXI.

284. *Sia AC : DF = BC : FE. Dico che sarà ancora AB : DE = AC : DF.*

DIMOSTRAZIONE.

Essendo AC : DF = CB : FE; sarà, permutando, AC : CB = DF : FE (§ 279), e, convertendo, AC : AB = DF : DE (§ 277). Onde, invertendo, AB : AC = DE : DF (§ 273); e, di nuovo permutando, AB : DE

= AC : DF. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

CAP. V.

Della teorica delle grandezze, che hanno tra eſſe ragioni ordinate, e perturbate, e di ciò, che da tale teorica deriva.

DEFINIZIONE.

Fig. 83 285. Sieno le grandezze A, B, C, D, E, F, ec. omogenee tra eſſe, e queſte altre L, M, N, O, P, Q, ec, anche tra eſſe omogenee. Si diranno le prime avere *ragioni ordinate* alle ſeconde, se le ragioni di A : B, di B : C, di C : D, di D : E, di E : F ſaranno riſpettivamente uguali alle ragioni di L : M, di M : N, di N, O, di O : P, di P : Q; ſi diranno poi le iſteſſe prime grandezze avere *ragioni perturbate* alle ſeconde, se le ragioni di A : B, di B, C, di C : D, di D : E, di E : F ſaranno riſpettivamente uguali alle ragioni di P : Q, di O : P, di N : O, di M : N : di L : M.

PROP.

PROP. XXII. TEOR. XXII.

286. *Se qualunque numero di grandezze omogenee A, B, C, D, E, F, ec. hanno ragioni ordinate, o perturbate ad altrettante grandezze anche tra esse omogenee L, M, N, O, P, Q, ec. . Dico che le prime, e le ultime sono in ambidue i casi proporzionali, cioè che A : F = L : Q.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè la ragione di A : F è composta dalle ragioni di A : B, di B : C, di C : D, di D : E, di E : F, e la ragione di L : Q è composta dalle ragioni di L : M, di M : N, di N : O, di O : P, di P : Q (§ 268). Ma le componenti dell' una in ambidue i casi sono rispettivamente uguali alle componenti dell'altra (§ *prec.*). Dunque le ragioni di A : F, e di L : Q, che sono le composte, sono anche uguali (§ 266). E perciò in ambidue i casi A : F = L : Q. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XXIII. TEOR. XXIII.

287. *Se qualunque numero di grandezze omogenee A, B, C, D, E, F, ec. hanno ragioni ordinate ad altrettante grandezze L, M,*

M, N, O, P, Q, ec., che ſono tra eſſe pure omogenee. Dico eſſere la ſomma di quelle all' ultima F, come la ſomma di queſte all' ultima Q.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo A : B = L : M per l' ipoteſi; ſarà, componendo, A + B : B = L + M : M (§ 274). Ma per l' ipoteſi B : C = M : N. Dunque A + B, B, C hanno ragioni ordinate ad L+M, M, N (§ 285); e perciò A + B : C = L + M : N (§ *prec.*). Onde, di nuovo componendo, A + B + C : C = L + M + N : N. E' in oltre C : D = N : O. Dunque le grandezze A + B + C, C, D hanno pure ragioni ordinate ad L + M + N, N, O. Sicchè A + B + C : D = L + M + N : O (§ *prec.*). Onde, componendo un' altra volta, ſarà la ſomma di A, B, C, D a D, come la ſomma di L, M, N, O ad O. Dell'iſteſſo modo procedendo innanzi ſi trova eſſere la ſomma di A, B, C, D, E, F ad F, come la ſomma di L, M, N, O, P, Q a Q. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

288. Se A, B, C, D, E, F, ec. ed L, M, N, O, P, Q, ec. ſono tutte grandez-

ze

ze omogenee, e le ragioni di A : L, di B : M, di C : N, di D : O, di E : P, di F : Q ſono tutte uguali; perchè, permutandole, ſono anche le ragioni di A : B, di B : C, di C : D, di D : E, di E : F riſpettivamente uguali alle ragioni di L : M, di M : N, di N : O, di O : P, di P : Q; avranno A, B, C, D, E, F ragioni ordinate ad L, M, N, O, P, Q (§ 285). E perciò la ſomma di quelle ſta ad F, come la ſomma di queſte a Q; e, permutando, la ſomma di quelle ſta alla ſomma di queſte, come l' ultima F all' ultima Q, o come E : P, o come D : O, ec.. Sicchè se più ragioni ſono tra eſſe uguali, e le grandezze ſono tutte omogenee, la ſomma di tutti gli antecedenti ſta alla ſomma di tutt' i conſeguenti, come uno degli antecedenti al ſuo conſeguente.

PROP. XXIV TEOR. XXIV.

289. *Sieno A, B, C, D quattro grandezze proporzionali, e ſieno L, M, N, O quattro altre, delle quali ſieno proporzionali due agli antecedenti, e due altre ai conſeguenti, cioè L : A = N : C, ed M : B = O : D. Dico che anche L, M, N, O ſono tra eſſe proporzionali.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Essendo L : A = N : C , A : B = C : D, M : B = O : D , ovvero , invertendo, B : M = D : O ; avranno L , A , B , M ragioni ordinate ad N , C, D, O (§ 285). Dunque L : M = N : O (§ 286). Ch' è ciò , che bisognava dimostrare.

PROP. XXV. TEOR. XXV.

290. *Se vi sono due proporzioni , ed i due conseguenti dell' una sono rispettivamente uguali a' due conseguenti dell' altra . Sarà sì la somma , che la differenza delli due primi antecedenti di ambedue le proporzioni al conseguente comune di essi, come sì la somma , che la differenza degli altri due antecedenti al conseguente comune pure di essi.*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno AB : G = DE : H, e BC : G = EF : H.

I. Essendo AB : G = DE : H , e BC : G = EF : H, ovvero, invertendo, G : BC = H : EF (§ 273) ; avranno AB , G , BC ragioni ordinate a DE , H , EF (§ 285). Onde sarà AB : BC = DE : EF ; e , componendo , sarà AC : CB = DF : FE (§ 274). Ma CB : G = EF : H per l'ipotesi.

Dun-

Dunque anche AC, CB, G hanno ragioni ordinate a DF, FE, H (§ 285). E perciò AC: G = DF: H (§ 286).

II. Si taglino BL = BC, EM = EF. Essendo AB: G = DE: H, e BC: G = EF: H, o BL: G = EM: H, ovvero, invertendo, G: BL = H: EM; avranno AB, G, BL ragioni ordinate a DE, H, EM (§ 285). Onde sarà AB: BL = DE: EM (§ 286); e dividendo, sarà AL: LB = DM: ME. Ma BL: G = EM: H. Dunque anche AL, LB, G hanno ragioni ordinate a DM, ME, H (§ 285). Sicchè sarà AL: G = DM: H (§ 286). Ch' è quanto bisognava dimostrare.

Fine del terzo Libro.

LIB.

LIBRO IV.

Delle teoriche più rilevanti della Geom. Piana che dalla dottrina della ragione, e della proporzione geometrica derivano.

CAP. I.

Delle ragioni uguali, che ſi poſſono avere con dividere uno, o due lati di qualunque triangolo.

LEMMA.

Fig. 87 291. *Se il lato AB di qualunque triangolo ABC ſi divide in qualſivoglia numero di parti uguali AD, DE, EF, FB, e pe' punti D, E, F ſi tirano le rette DG, EH, FI parallele a BC; divideranno tali rette il lato AC in altrettanti parti AG, GH, HI, IC anche tra eſſe uguali.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Per gli punti G , H , I ſi tirino GK , HL , IM parallele ad AB (§ 86). Eſſendo GK = DE , HL = EF , IM = FB (§ 104); ſaranno AD , GK , HL , IM tutte uguali. Onde i triangoli ADG, GKH, HLI , IMC ſono equiangoli , e hanno uguali i lati AD , GK , HL , IM . Dunque AG , GH , HI , IC ſono anche uguali tra eſſe (§ 100) . Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. I. TEOR. I.

292. *Sia in qualunque triangolo tirata una retta : ſe è eſſa parallela a un lato , divide gli altri due lati in parti proporzionali ; e ſe divide due lati in parti proporzionali , è parallela al terzo lato .* –

DIMOSTRAZIONE.

I. Sia nel triangolo ABC la DE paral- Fig. 88
lela a BC . S' intendano le AD , DB diviſe in parti uguali all' aliquota comune di eſſe , e per gli punti delle diviſioni s' intendano tirate delle rette parallele tutte a BC ; divideranno tali rette in altrettante parti uguali anche AE , EC (§ *prec.*) . Sicchè una delle parti , nelle quali ſi ſono con-

concepite diviſe AD , DB , e una di quelle , nelle quali verrebbero diviſe AE , EB dalle dette parallele , ſono aliquote ſimili sì di DB , EC, che di AD, AE. E perciò AD: DB = AE: EC (§ 257).

II. Divida DE i lati AB , AC in parti proporzionali , cioè che ſia AD: DB = AE: EC. Se ſi niega eſſere DE parallela a BC; ſi tiri per D , s'è poſsibile , un' altra retta DF parallela a BC. Sarà la ragione di AF: FC uguale alla ragione di AD : DB per la parte 1. Ma per l'ipoteſi la ragione di AE: EC è uguale a quella di AD : DB . Dunque AF : FC = AE : EC (§ 245) ; e, componendo , ſarà AC: CF = AC: CE (§ 274). Onde CF = CE (§ 264), cioè il tutto è uguale alla parte . Ma ciò è impoſsibile (§ 59) . Dunque è impoſsibile che non ſia DE parallela a BC . Per la qual coſa ſe in qualunque triangolo , ec.. Ch' è quanto biſognava dimoſtrare.

PROP. II. TEOR. II.

Fig. 89 293. *Sieno in qualunque triangolo ABC tirate quante rette ſi ſieno DG , EH , FI : ſe tali rette ſono parallele a BC , le parti di AB hanno ragioni ordinate alle parti di AC ; e ſe le parti di AB hanno ragioni ordinate alle parti di AC , le dette rette ſono tutte parallele a BC.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

I. Sieno DG, EH, FI parallele a BC. Per G, e H si tirino GM, HO parallele ad AB. Saranno GK = DE, HN = KL = EF, NO = FB (§ 104). Essendo nel triangolo AEH la DG parallela ad EH, sarà AG : GH = AD : DE (§ 292). Similmente, essendo nel triangolo GLI la KH parallela ad LI, sarà GH : HI = GK : KL = DE : EF. Finalmente, essendo in HOC la IN parallela ad OC, sarà HI : IC = HN : NO = EF : FB. Dunque le parti AG, GH, HI, IC hanno ragioni ordinate alle parti AD, DE, EF, FB (§ 285).

II. Abbiano le parti AD, DE, EF, FB ragioni ordinate alle parti AG, GH, HI, IC. Sarà AB : BF = AC : CI (§ 287), e dividendo AF : FB = AI : IC (§ 275). Dunque FI è parallela a BC (§ 292). Similmente si dimostra essere EH parallela ad FI, e conseguentemente a BC, e DC parallela ad EH, e per conseguenza a BC. Sicchè DG, EH, FI sono tutte parallele a BC. Ch'è quanto bisognava dimostrare.

PROP. III. TEOR. III.

294. *Sia in qualunque triangolo ABC tirata dal vertice dell' angolo ABC la retta BD : se tale retta divide l' angolo ABC in* Fig. 9.

due parti uguali, divide ancora la baſe AC nella ragione de' lati, cioè che AD : DC = AB : BC; e ſe divide la baſe nella ragione de' lati, divide ancora l' angolo ABC in due parti uguali.

DIMOSTRAZIONE.

Per C ſi tiri CE parallela a BD, e ſi prolunghi, finchè s' uniſca con AB prolungata in E.

I. Sia l' angolo ABD uguale a DBC. Eſſendo per le parallele BD, CE l' angolo BCE = DBC, e BEC = ABD (§ 83). Sarà l' angolo BCE = BEC (§ 51). Dunque BC = BE (§ 93); e conſeguentemente AB : BC = AB : BE (292). Sicchè AD : DC = AB : BC (§ 245).

II. Sia ora AD : DC = AB : BC. Per le parallele DB, CE ſarà AD : DC = AB : BE (§ 292). Dunque AB : BC = AB : BE (§ 245). E perciò BC = BE (§ 264); e conſeguentemente l' angolo BEC = BCE (§ 91). Ma ABD = BEC, e DBC = BCE (§ 83). Sicchè l' angolo ABD = DBC Ch' è quanto biſognava dimoſtrare.

CAP.

CAP. II.

De' caratteri da conoscere la simiglianza de' triangoli, e quella de' parallelogrammi.

DEFINIZIONE.

295. Due figure rettilinee si dicono *simili*, se sono gli angoli dell' una uguali rispettivamente agli angoli dell' altra, e hanno di più i lati, che formano gli angoli uguali, tra essi proporzionali.

COROLLARIO I.

296. Sicchè i rettilinei ABCD, EFGH sono simili, se sono gli angoli in A, B, C, D rispettivamente uguali agli angoli in E, F, G, H, e sono di più AB : BC = EF : FG, BC : CD = FG : GH, CD : DA = GH : HE, DA : AB = HE : EF. Fig. 91

COROLLARIO II.

297. Sieno in oltre i rettilinei ABCD, LMNO ambidue simili al terzo EFGH. Saranno agli angoli in E, F, G, H ugua-

li rispettivamente sì gli angoli in A, B, C, D, che gli angoli in L, M, N, O, e a' lati EF, FG, GH, HE rispettivamente proporzionali sì AB, BC, CD, DA, che LM, MN, NO, OL. Onde gli angoli in A, B, C, D sono rispettivamente uguali agli angoli in L, M, N, O, e i lati AB, BC, CD, DA sono rispettivamente proporzionali ad LM, MN, NO, OL. Sicchè i [illegible]ttilinei simili a un terzo, sono anche tra [illegible]li simili.

PROP. IV. TEOR. IV.

Fig. 92 289. *Sieno i triangoli ABC, DEF equiangoli, cioè sieno l' angolo ABC = DEF, BCA = EFD, CAB = EDF. Dico che tali triangoli sono simili.*

DIMOSTRAZIONE.

Si taglino BL = DE, BM = EF (§ 50), e si congiunga LM. Saranno LM = DF, e l' angolo BLM uguale ad EDF (§ 98), Ma l' angolo BAC è pure uguale per l' ipotesi all' angolo EDF. Sicchè l' angolo BLM = BAC (§ 51); e perciò LM è parallela ad AC (§ 82). Onde AL : LB = CM : MB (§ 292); e, componendo, AB : BL = CB : BM (§ 274); e, permutando, AB : BC = LB : PM = DE : EF. Similmente si dimostra essere BC : CA : = EF : FD, e CA : AB = FD :

= FD : DE . Dunque i triangoli ABC , DEF , che ſono equiangoli , hanno anche i lati , che formano gli angoli uguali , proporzionali ; e perciò ſono ſimili (§ 295) . Ch' è ciò , che biſognava dimoſtrare .

COROLLARIO.

199. Sicchè qualora i triangoli ABC , DEF ſono equiangoli , ſi hanno le ſeguenti proporzioni AB : BC = DE : EF , BC : CA = EF : FD , CA : AB = FD : DE , e ſono conſeguentemente ŏmologhi i lati , che ſono oppoſti ad angoli uguali .

PROP. V. TEOR. V.

300. *Abbiano i triangoli ABC , DEF i lati proporzionali , cioè AB : BC = DE : EF , BC : CA = EF , FD , CA : AB = FD : DE . Dico tali triangoli eſſere pure ſimili .*

DIMOSTRAZIONE.

Si taglino BL = DE , BM = EF , e ſi congiunga LM . Sarà AB : BC = LB : BM ; e , permutando , AB : BL = CB : BM (§ 279) ; e , dividendo , AL : LB = CM : MB (§ 275) . Onde LM è parallela ad AC (§ 292) ; e conſeguentemente il triangolo LBM è equiangolo col triangolo ABC . Sicchè ML : LB = CA : AB (§

prec.) = FD : DE . E perciò LM = DF (§ 264) ; e conſeguentemente il triangolo DEF è equiangolo col triangolo LBM (§ 99), e perciò equiangolo col triangolo ABC. Per la qual coſa i triangoli ABC , DEF ſono ſimili (§ 295) . Ch' è ciò , che biſognava dimoſtrare .

COROLLARIO.

301. Eſſendo gli angoli in A , B , C riſpettivamente uguali agli angoli in D , E , F : è chiaro che gli angoli uguali ſono oppoſti ai lati omologhi .

PROP. VI. TEOR. VI.

302. *Abbiano i triangoli ABC , DEF l' angolo ABC = DEF , e i lati AB , BC proporzionali ai lati DE , EF . Dico tali triangoli eſſere anche ſimili .*

DIMOSTRAZIONE.

Si taglino BL = DE , BM = EF , e ſi congiunga LM . Sarà il triangolo LBM equiangolo con DEF ; e ſarà AB : BC = LB : PM ; onde, permutando , e dividendo , AL : LB = CM : MB (§§ 279 , e 275) . Sicchè LM è parallela ad AC (§ 292) . E perciò il triangolo ABC è equiangolo con LBM , e conſeguentemente con DEF . Per la

la qual cosa i triangoli ABC, DEF sono simili (§ 298). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. VII. TEOR. VII.

303. *Abbiano i triangoli ABC, DEF i lati BA, AC proporzionali a' lati ED, DF, e degli angoli non formati da tali lati i due ABC, DEF sieno uguali, e gli altri due ACB, DFE sieno della medesima spezie. Dico tali triangoli essere pure simili.*

DIMOSTRAZIONE.

Se si niega essere il triangolo ABC simile a DEF, sarà l' angolo BAC maggiore, o minore di EDF. Sia, s' è possibile, BAC maggiore di EDF. Si faccia in A l' angolo BAG = EDF; sarà AGB = DFE (§ 89). Onde BA : AG = ED : DF (§ 299). Ma per l' ipotesi BA : AC = ED : DF. Dunque BA : AG = BA : AC (§ 245); e perciò AG = AC (§ 264), e conseguentemente l'angolo ACG = AGC (§ 91). Sono gli angoli ACB, DFE per l' ipotesi dell' istessa spezie, vale a dire ambidue o ottusi, o acuti. Dunque anche gli angoli AGC, AGB sono ambidue o ottusi, o acuti. Ma ciò è impossibile (§ 89). Dunque è impossibile che sia l' angolo BAC maggiore di EDF. Similmente si può dimostrare non essere

BAC minore di EDF. Dunque è BAC = EDF, e conſeguentemente ACB = DFE (§ 89). E perciò i triangoli ABC, DEF ſono equiangoli, e conſeguentemente ſimili (§ 298). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. VIII. TEOR. VIII.

Fig. 93 304. *Abbia il triangolo ABC l' angolo ABC retto, e ſia BD perpendicolare ad AC. Dico eſſere i triangoli ABD, BDC ſimili tra eſſi, e ſimili all' intero ABC.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè i triangoli ADB, ABC hanno l' angolo ADB = ABC (§ 61), l' angolo in A comune, e conſeguentemente l'angolo ABD = ACB (§ 89). Dunque i triangoli ADB, ABC ſono ſimili (§ 298). In oltre i triangoli DBC, ABC hanno l'angolo BDC = ABC (§ 61), l'angolo in C comune, e conſeguentemente l'angolo DBC = BAC. Sicchè i triangoli DBC, ABC ſono pure ſimili (§ 298). Finalmente i due triangoli ADB, BDC, come ſimili ad ABC, ſono anche ſimili tra eſſi (§ 297). Ch' è quanto biſognava dimoſtrare.

CO-

COROLLARIO

305. Dalli tre triangoli ſimili ABC, ADB, BDC ſi ricavano le tre ſeguenti proporzioni continue CA : AB = AB : AD , AC : CB = CB : CD, e AD : DB = DB : DC.

PROP. IX. TEOR. IX.

306. *Abbiano i parallelogrammi AC , EG* Fig.94 *l' angolo ABC = EFG e i lati AB , BC proporzionali ai lati EF , FG . Dico eſſere tali parallelogrammi ſimili tra eſſi.*

DIMOSTRAZIONE.

Avendo i parallelogrammi AC, EG l'angolo ABC = EFG, ſaranno l' angolo BCD = FGH , CDA = GHE , DAB = HEF [§ 83, e 104]. In oltre, eſſendo AB : BC = EF : FG, ſarà DC : CB = HG : GF, e, invertendo, BC : CD = FG : GH [§ 273]. Similmente ſi dimoſtra eſſere CD : DA = GH : HE, e DA : AB = HE : EF. Sicchè i parallelogrammi AC , EG ſono ſimili (§ 295) . Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP.

PROP. X. TEOR. X.

Fig.24 307. *Sieno i parallelogrammi GE, FH esistenti intorno la diagonale del parallelogrammo BD. Dico essere i parallelogrammi GE, FH simili tra essi, e simili all' intero BD.*

DIMOSTRAZIONE.

Essendo i triangoli CFO, CDA equiangoli; sarà OF : FC = AD : DC (§ 292). Sicchè i parallelogrammi FH, DB hanno l' angolo OFC = ADC, e i lati OF, FC proporzionali ad AD, DC, e perciò sono simili tra essi (§ *prec.*). Dell' istesso modo si dimostra essere GE simile a DB. Finalmente i parallelogrammi FH, GE sono ambidue simili a DB, onde sono anche simili tra essi (§ 297). Ch' è quanto bisognava dimostrare.

AVVERTIMENTO.

308. Tutti gli altri rettilinei non hanno caratteri speziali per poter conoscere la similianza di essi; e perciò non si véggono quì soggiunti. Intanto soggiugniamo la seguente, perchè è la conversa di quest' ultima.

PROP.

PROP. XI. TEOR. XI.

309. *Sieno i parallelogrammi BD , GE ſimili , e abbiano l' angolo GAE comune . Dico che il parallelogrammo G E è intorno la diagonale di D B.*

DIMOSTRAZIONE.

Si tirino ne' parallelogrammi D B , G E le diagonali AC , AO . Eſſendo i parallelogrammi DB , GE ſimili ; ſaranno gli angoli AGO, ADC uguali , ed i lati AG, GO proporzionali a' lati AD , DC . Onde i triangoli AGO, ADC ſono equiangoli (§ 302); e perciò l' angolo GAO = D A C . Onde la diagonale AO cade su AC ; e conſeguentemente il parallelogrammo GE è intorno la diagonale di DB . Ch' è ciò , che biſognava dimoſtrare .

CAP. III.

Del modo di dividere qualunque retta ſecondo qualſivoglia data ragione; e del modo di trovare una retta, che ſia in proporzione con altre rette date.

DEFINIZIONE.

Fig.42 310. Una retta qualungue AB ſi dice *ſegata ſecondo l' eſtrema, e media ragione in* C, se l' intera AB ſta alla parte maggiore BC, come l'iſteſſa BC alla parte minore AC.

PROP. XII. PROBL. I.

311. *Data qualunque retta, tagliare da eſſa qualſivoglia ſua parte.*

SOLUZIONE.

Sia da tagliarſi da AB la ſua terza parte.

1. Si tiri da A l'indefinita AO, che faccia con AB qualunque angolo OAB.

2. In AO ſi prenda ad arbitrio il punto D; e DO ſi taglino DE, EF uguali ambedue ad AD (§ 50).

3. Si

3. Si congiunga BF; e per D ſi tiri DC parallela a BF (§ 86).

Dico eſſere AC la terza parte di AB.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo per le parallele BF, DC la BC: CA = FD : DA (§ 292); ſarà, componendo, BA : AC = FA : AD (§. 274). Ma AD è terza parte di AF. Dunque AC è anche terza parte di AB. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XIII. PROBL. II.

312. *Date due rette AB, AC, delle quali* Fig. 89 *AB ſia indiviſa, e AC ſia diviſa nelle parti AG, GH, HI, IC, dividere la AB in parti proporzionali alle parti di AC.*

SOLUZIONE.

1. Si diſpongano AB, AC in modo, che facciano in A qualſivoglia angolo CAB.

2. S' uniſca BC; e per G, H, I ſi tirino GD, HE, IF parallele a BC (§ 86).

Dico eſſere diviſa AB nelle parti cercate.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè le parti AD, DE, EF, FB ſono proporzionali alle parti AG, GH, HI,

HI, IC (§ 293). Sicchè s' è divisa AB in parti proporzionali alle parti di AC. Ch'è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

PROP. XIV. PROBL. III.

313. *Data qualunque retta terminata dividerla in qualsivoglia numero di parti uguali.*

SOLUZIONE.

Fig.87 Sia da dividersi AB in 4 parti uguali.

1. Da A si tiri l' indefinita AO, che faccia con AB qualunque angolo OAB.

2. Si prenda in AO ad arbitrio il punto G, e da GO si taglino tre altre parti GH, HI, IC uguali tutte ad AG (§ 50).

3. Si congiunga BC; e per G, H, I si tirino GD, HE, IF parallele a BC (§ 86).

Dico essere AB divisa in 4 parti uguali AD, DE, EF, FB.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè le parti AD, DE, EF, FB sono proporzionali alle parti AG, GH, HI, IC (§ 293). Ma queste sono uguali. Dunque sono uguali anche quelle (§ 244). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP.

PROP. XV. PROBL. IV.

314. *Data una retta, dividerla ſecondo l' eſtrema, e media ragione.*

SOLUZIONE.

Sia AB la retta data.

Si divida AB in C in modo, che 'l rettangolo fatto da BA, e AC ſia uguale al quadrato di BC (§ 139).

Dico che AB è diviſa in C ſecondo l' eſtrema, e media ragione.

DIMOSTRAZIONE.

Si deſcriva il cerchio BDC, che abbia per diametro, o per corda BC; e, tirata da A la tangente AD (§ 154), ſi congiungano DB, DC. Sarà il quadrato di AD uguale al rettangolo fatto da BA, e AC (§ 186), e conſeguentemente uguale al quadrato di BC. Onde AD = CB (§ 116). In oltre i triangoli ADB, ACD ſono ſimili, perchè hanno l' angolo ADC = DBA (§ 174), l' angolo in A comune, e conſeguentemente l'angolo ADB=ACD (§ 89). Sicchè BA : AD = AD : AC (§ 299); e perciò AB : BC = BC : AC. Per la qual coſa s'è diviſa AB in C ſecondo l' eſtrema, e me-

e media ragione. Ch'è cio, che biſognava fare, e dimoſtrare.

COROLLARIO.

315. Quindi l'iſteſſo è dividere una retta ſecondo l'eſtrema, e media ragione, che dividerla in un punto tale, che 'l rettangolo fatto dall' intera retta, e da una delle parti ſia uguale al quadrato dell' altra parte.

PROP. XVI PROBL. V.

316. *Date tre rette, trovare la quarta proporzionale.*

SOLUZIONE.

Fig. 97 Sieno A, B, C le tre rette date.

1. Si faccia qualunque angolo QLN; e ſi taglino LM = A, MN = B, LO = C (§ 50).

2. Si congiunga MO; e per N ſi tiri NP parallela ad MO (§ 86).

Dico eſſere OP la quarta proporzionale cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo LM : MN = LO : OP (§ 292); ſarà A : B = C : OP. Dunque OP è quarta proporzionale in ordine ad A, B, C. Ch' è ciò

è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XVII. PROBL. VI.

317. *Date due rette, trovare la terza proporzionale.*

SOLUZIONE.

Sieno A, e B le due rette date.

1. Si faccia qualunque angolo NLQ; e si taglino LM = A, MN = B, ed LO = B (§ 50). Fig. 98

2. Si congiunga MO; e per N si tiri NP parallela ad MO (§ 86).

Dico essere OP la terza proporzionale cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo LM : MN = LO: OP (§292); sarà A : B = B : OP. Sicchè OP è terza proporzionale in ordine ad A, e B. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XVIII. PROBL. VII.

318. *Date due rette, trovare la mezza proporzionale.*

SOLUZIONE.

Fig.99 Sieno A, e B le due rette date.

1. Si tiri l'indeterminata LN ; e da essa si taglino LM = A , MN = B .

2. Su LN si descriva il mezzo cerchio LON; e da M s'innalzi su LN la perpendicolare MO (§ 72) , che interseca la periferia LON in O.

Dico essere MO la mezza proporzionale

DIMOSTRAZIONE.

Si congiungano le rette LO , ON . Essendo l'angolo LON retto (§ 169) ; sarà LM : MO = MO : MN (§ 305); e perciò A : MO = MO : B . Sicchè MO è mezza proporzionale tra A , e B . Ch'è ciò che bisognava dimostrare.

AVVERTIMENTO.

319. Si noti che coll' istesso metodo si possono trovare ancora tra due rette date 3 , 7 , 15 , 31 , ec. mezze proporzionali . Il trovarne poi tante , quante ne contrassegnano i numeri , che tramezzano tra 1 , 3 , 7 , 15 , 31 , ec., appartiene alla Geom. sublime, e non alla elementare.

CAP.

CAP. IV.

Delle ragioni de' triangoli, e de' parallelogrammi.

DEFINIZIONE.

320. Si dice *altezza* d'un triangolo, o d'un parallelogrammo la perpendicolare calata ſulla baſe dal vertice dell' angolo oppoſto all' iſteſſa baſe.

COROLLARIO.

321. Quindi i triangoli, ed i parallelogrammi racchiuſi tra le medeſime parallele, ſono d'uguali altezze.

PROP. XIX. TEOR. XII.

322. *I triangoli, ed i parallelogrammi, che hanno uguali altezze, ſono tra eſſi nella ragione delle baſi.*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno i triangoli ACB, BCE, ed i paral- Fig. 100
lelogrammi BD, BF racchiuſi tra le paral-

lele AE, DF, e per conſeguenza d' uguali altezze. S' intendano le baſi AB, BE diviſe nelle parti AG, GH, HI, IB., BK, KL, LE, uguale ognuna all' aliquota comune di eſſe, e s' intendano tirate le rette CG, CH, CI, CK, CL. Saranno tutt' i piccioli triangoli ACG, GCH, HCI, ICB, BCK, KCL, LCE uguali tra eſſi (§ 110). Onde il triangolo ACG, e la ſua baſe AG ſono aliquote ſimili sì del triangolo BCE, e della ſua baſe BE, che del triangolo ACB, e della ſua baſe AB. E perciò alla ragione delle baſi AB, BE è uguale la ragione de' triangoli ACB, BCE (§ 257), e conſeguentemente anche quella de' parallelogrammi BD, BF, che ſono doppj de' triangoli ACB, BCE. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XX. TEOR. XIII.

Fi.101 323. *I triangoli ACB, BGE, ed i parallelogrammi BD, BF, che hanno le baſi AB, BE uguali, e le altezze CH, GI diſuguali, ſono tra eſſi nella ragione delle altezze CH, GI.*

DIMOSTRAZIONE.

Si diſpongano i parallelogrammi BD, BF in modo, che AB, BE facciano una retta continuata; e, prolungata FG in O, ſi congiun-

giungano le rette AO , BO . Saranno il triangolo AOB = BGE (§ 110) , ed OH = GI . In oltre , essendo alla ragione di CH : HQ uguale sì quella di CBH : OBH , che quella di CAH : OAH (§ *prec.*) , sarà CBH : OBH=CAH : OAH (§ 245); e, permutando, CBH : CAH = OBH : OAH (§ 279). Onde, componendo, e permutando, sarà l' intero triangolo ACB all' intero AOB, o pure ACB : BGE = CAH : OAH = CH : HO = : CH GI . Finalmente i parallelogrammi CD , BF sono nella ragione de' triangoli AGB , BGE (§ 280) . Dunque anche i parallelogrammi BD , BF sono tra essi nella ragione delle altezze CH , GI (§ 245) . Ch'è ciò , che bisognava dimostrare .

PROP. XXI. TEOR. XIV.

324. *I triangoli ADB , EHF , ed i parallogrammi AC , EG , che hanno disuguali basi AB , EF , e disuguali altezze DO , HP , sono tra essi in ragione composta da quella delle basi , e da quella delle altezze .* Fi. 102

DIMOSTRAZIONE.

Si faccia il parallelogrammo IL , che abbia l' altezza MQ = DO , e la base IK = EF ; e si tiri in esso la diagonale MK . Essendo i triangoli ADB , IMK , EHF tre

grandezze omogenee, sarà la ragione di ADB: EHF composta dalle ragioni di ADB: IMK, e di IMK: EHF (§ 267). Ma ADB: IMK = AB: IK = AB: EF (§ 322), ed IMK: EHF = MQ: HP = DO: HP (§ 323). Dunque la ragione di ADB: EHF è composta dalle ragioni di AB: EF, e di DO: HP. Finalmente la ragione de' parallelogrammi AC, EG è uguale alla ragione de' triangoli ADB, EHF. Dunque anche la ragione de' parallelogrammi AC, EG è composta dalle ragioni di AB: EF, e di DO: HP. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XXII. TEOR. XV.

Fi.103 325. *I triangoli ABC, EBG, ed i parallelogrammi BD, BF, che hanno un' angolo uguale a un' angolo, cioè ABC = EBG, sono tra essi pure in ragione composta da quelle de' lati, che formano gli angoli uguali, vale a dire composta dalle ragioni di AB: BG, e di CB: BE.*

DIMOSTRAZIONE.

Si dispongano i parallelogrammi in modo, che AB, e BG facciano una retta continuata; faranno, per gli angoli uguali ABC, EBG, una retta continuata anche CB, BE (§ 78). Di più da' punti C, ed

E

E ſi calino ſu AG le perpendicolari CI, EH. Eſſendo i triangoli CBI, EBH equiangoli, ſarà BC : CI = BE : EH (§ 299), e, permutando, CB : BE = CI : EH (§ 279). Ma tanto la ragione de' triangoli ABC, EBG, quanto quella de' parallelogrammi BD, BF è compoſta dalle ragioni di AB : BG, e di CI : EH (§ *prec.*) Dunque tanto la ragione de' triangoli ABC, EBG, quanto quella de' parallelogrammi BD, BF è compoſta dalle ragioni di AB, BG, e di CB : BE. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

CAP. V.

Dell' uguaglianza de' triangoli, e de' parallelogrammi, che hanno le baſi in ragione reciproca delle altezze; e dell' uguaglianza de' rettangoli formati da rette proporzionali.

PROP. XXIII. TEOR. XVI.

326. *Se due triangoli ABD, EFH, o due parallelogrammi AC, EG ſono uguali, la ragione delle baſi AB, EF è reciproca di quella delle altezze DI, KH; e ſe la ragione delle baſi è reciproca di quella delle altezze,* Fi.104

sì i triangoli ABD , EFH , che i parallelogrammi AC , EG ſono uguali .

DIMOSTRAZIONE.

Dall' altezza maggiore DI ſi tagli IO=HK, e ſi congiungano AO , BO .

I. Sieno uguali i triangoli ABD , EFH, e conſeguentemente uguali i parallelogrammi AC, EG . Sarà la ragione del triangolo ABO : EFH uguale alla ragione dell' iſteſſo triangolo ABO : ABD (§ 262) . Ma ABO : EFH = AB : EF (§ 322) , e ABO : ABD = IO : ID (§ 323) = HK : DI . Dunque AB : EF = HK : DI . Sicchè la ragione delle baſi è reciproca di quelle delle altezze .

II. Sia la ragione delle baſi reciproca di quella delle altezze . Sarà AB : EF = HK : DI = OI : DI . Ma AB : EF = AOB : EHF (§ 322), e OI : DI = AOB : ADB (§ 323) . Dunque il triangolo AOB : EHF = AOB : ADB : E perciò è il triangolo ADB = EHF (§ 264) , e conſeguentemente è il parallelogrammo AC=EG . Ch' è quanto biſognava dimoſtrare .

COROLLARIO.

327. Se è l' angolo DAB=HEF, i triangoli DAI , HEK ſono equiangoli . Onde KH : HE = ID : DA (§ 299) ; e, per-

permutando, KH : ID = HE : DA (§ 279). Dunque i triangoli ADB, EHF, ed i parallelogrammi AC, EG, che hanno l' angolo DAB = HEF, se sono uguali, hanno i lati, che formano sì fatti angoli uguali reciprocamente proporzionali, cioè AB : EF = HE : DA, e se hanno i detti lati reciprocamente proporzionali, sono tra essi uguali.

PROP. XXIV. TEOR. XVII.

328. *Se quattro rette A, B, C, D sono proporzionali, il rettangolo fatto dalle due estreme A, e D è uguale al rettangolo fatto dalle due di mezzo B, e C; e se A, B, C, D sono quattro rette tali, che 'l rettangolo fatto dall' estreme A, e D è uguale al rettangolo fatto dalle due di mezzo B, e C, sono elleno proporzionali.* Fi. 105

DIMOSTRAZIONE.

Si facciano il rettangolo LN, che abbia il lato LM = A, LO = D, e 'l rettangolo PR, che abbia PQ = B, PS = C.

I. Sia A : B = C : D. Dunque LM : PQ = PS : LO. E perciò il rettangolo LN, fatto dalle estreme A, e D, è uguale al rettangolo PR, fatto dalle due di mezzo B, e C (§ *prec.*).

II. Sia il rettangolo LN, fatto dalle due estre-

eſtreme A, e D, uguale al rettangolo PR, fatto dalle due di mezzo B, e C. Sarà LM: PQ = PS: LO (§ *prec.*). E perciò A: B = C: D. Ch' è quanto biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

329. Se ſarà B = C, le quattro rette A, B, C, D ſi ridurranno a tre A, B, D, e 'l rettangolo PR ſi ridurrà al quadrato di B. E perciò, ſe tre rette A, B, D ſono continuamente proporzionali, il rettangolo fatto dalle due eſtreme A, e D è uguale al quadrato di quella di mezzo B; e se A, B, D ſono tre rette tali, che 'l rettangolo fatto dalle due eſtreme A, e D è uguale al quadrato di quella di mezzo B, tali rette A, B, D ſono continuamente proporzionali.

CAP. VI.

Della ragione, e proporzionalità de' rettilinei ſimili, e de' principali probl. appartenenti alla teorica de' medeſimi rettilinei ſimili.

LEMMA.

330. *Se dai vertici di due angoli uguali di due poligoni ſimili ſi tirano delle rette ai vertici degli angoli oppoſti; sì fatte rette dividono i poligoni in triangoli uguali di numero, e riſpettivamente ſimili.*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno i poligoni ABCDEF, LMNOPQ Fi.106 ſimili, e dai vertici degli angoli uguali in A, ed L ſieno tirate ai vertici degli angoli oppoſti le rette AC, AD, AE, LN, LO, LP. E' chiaro che quante rette ſono tirate in uno, altrettante ne ſono tirate nell' altro. Onde sì fatte rette dividono i poligoni in ugual numero di triangoli. In oltre, eſſendo i poligoni ſimili, ſarà l' angolo in B = M, e AB : BC = LM : MN (§295).

(§ 295). Dunque è l' angolo BCA = MNL, e per conſeguenza ACD = LNO, ed il triangolo ABC ſimile ad LMN (§ 302). E perciò AC : CB = LN : NM . Ma BC : CD = MN : NO . Onde AC : CD = LN : NO (§ 286) . Sicchè anche i triangoli ACD, LNO ſono ſimili (§ 302). Dell' iſteſſo modo ſi dimoſtra eſſere il triangolo ADE ſimile ad LOP , ed EFA ſimile a PQL. Per la qual coſa ſe dai vertici , ec. . Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XXV. TEOR. XVIII.

331. *I triangoli ſimili hanno tra eſſi una ragione , ch' è duplicata di quella de' lati omologhi .*

DIMOSTRAZIONE.

Fig.92 Sieno i triangoli ABC , DEF ſimili, cioè abbiano l' angolo BAC = EDF, ACB = DFE , e CBA = FED . Sarà BA : AC = ED : DF (§ 299) , e , permutando, AB : DE = AC : DF (§ 279) . Ma la ragione de' triangoli ABC , DEF è compoſta dalle ragioni di AB : DE , e di AC : DF (§ 325.) . Sicchè , eſſendo sì fatte ragioni componenti uguali , la ragione de' triangoli ABC , DEF ſarà duplicata d' una di eſſe (§ 247) , e perciò duplicata della ragione de' lati omologhi AB , DE.

Ch'

Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XXVI. TEOR. XIX.

332. *I poligoni simili hanno tra essi una ragione, ch' è pure duplicata di quella de' lati omologhi.*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno i poligoni ABCDEF, LMNOPQ Fi.106
simili; e dai vertici degli angoli uguali in A, ed L si tirino ai vertici degli angoli opposti le rette AC, AD, AE, LN, LO, LP; saranno i triangoli ABC, ACD, ADE, AEF rispettivamente simili ad LMN, LNO, LOP, LPQ (§ 330). Essendo le ragioni di BC: MN, di CD: NO, di DE: OP, di EF: PQ tutte uguali, uguali saranno ancora le duplicate di esse (§ 270), e conseguentemente uguali ancora le ragioni del triangolo ABC: LMN, di ACD: LNO, di ADE: LOP, di AEF: LPQ (§ *prec.*). Sicchè la somma di tutti gli antecedenti delle ultime ragioni sarà alla somma di tutt' i conseguenti, come uno degli antecedenti al suo conseguente (§ 288), o sia il poligono ABCDEF al poligono LMNOPQ, come ABC: LMN, e perciò in duplicata ragione di AB: LM (§ *prec.*) Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

CO-

COROLLARIO I.

333. Si prolunghi LM in R, finchè ſia LR terza proporzionale in ordine ad AB, LM. Sarà la ragione di AB : LR duplicata della ragione di AB : LM (§ 269), e conſeguentemente uguale alla ragione del poligono ABCDEF al poligono LMNOPQ.

COROLLARIO II.

334. Eſſendo in oltre i quadrati tutti ſimili tra eſſi, ſaranno pure i quadrati in ragione duplicata de' lati di eſſi. Onde la duplicata della ragione di due linee è l'iſteſſa della ragione de' quadrati fatti ſulle medeſime linee. E perciò appreſſo ſi farà uſo ſpeſſe volte della ragione de' quadrati di due linee in vece della duplicata delle medeſime linee.

PROP. XXVII. TEOR. XX.

Fi.105 335. *Se quattro rette A, B, C, D ſono proporzionali, i rettilinei ſimili, che hanno per lati omologhi A, e B, ſono proporzionali co' rettilinii ſimili, che hanno per lati omologhi C, e D; e ſe A, B, C, D ſono tali, che i rettilinei ſimili, che hanno per lati omologhi A, e B, ſono proporzionali co'rettilinei ſimili, che hanno per lati omologhi*

ghi C , e D , le rette A , B , C , D ſono proporzionali .

DIMOSTRAZIONE.

I. Sieno le ragioni di A : B , e di C D uguali , uguali ſaranno pure le duplicate di eſſe (§ 270) . Dunque la ragione de' rettilinei ſimili , che hanno per lati omologhi A , e B, è uguale alla ragione de' rettilinei ſimili , che hanno per lati omologhi C, e D (§ 332) .

II. Sia la ragione de' rettilinei ſimili , che hanno per lati omologhi A , e B , uguale alla ragione de' rettilinei ſimili , che hanno per lati omologhi C , e D . Saranno le duplicate delle ragioni di A : B , e di C : D uguali (§ 332) . Onde uguali ſaranno ancora le ragioni di A : B , e di C : D (§ 271) . Ch' è quanto bisognava dimoſtrare.

PROP. XXVIII. PROBL. VIII.

336. *Dato un rettilineo , e data una* Fi. 106 *retta , coſtruire ſu di eſſa un' altro rettilineo ſimile al dato .*

SOLUZIONE.

Sieno ABCDEF il rettilineo dato , ed LM la retta data .

1. Si divida il rettilineo dato in quanti trian-

triangoli si può dividere colle rette AC, AD, AE.

2. Ne' punti L, ed M di LM si facciano gli angoli MLN, LMN rispettivamente uguali a BAC, ABC (§ 67); s' avrà l' angolo LNM = ACB (§ 89).

3. Si facciano ne' punti L, ed N di LN gli angoli NLO, LNO rispettivamente uguali a CAD, ACD; s' avrà l' angolo LON = ADC.

4. Ne' punti L, ed O di LO si facciano gli angoli OLP, LOP rispettivamente uguali a DAE, ADE; s' avrà l' angolo LPO = AED.

5. Finalmente ne' punti L, e P di LP si facciano gli angoli PLQ, LPQ rispettivamente uguali ad EAF, AEF; s' avrà l' angolo LQP = AFE.

Dico essere LMNOPQ il rettilineo cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo la somma degli angoli fatti in L, N, O, P uguali rispettivamente alla somma degli angoli componenti quelli, che sono in A, C, D, E; saranno i rettilinei LMNOPQ, ABCDEF tra essi equiangoli. In oltre i triangoli LMN, LNO, LOP, LPQ sono rispettivamente equiangoli con ABC, ACD, ADE, AEF. Dunque LM : MN = AB : BC, MN : NL = BC : CA, LN :

LN : NO = AC : CD (§ 299) . Onde MN : NO = BC : CD (§ 286) . Similmente si dimostra essere NO : OP = CD : DE , OP : PQ = DE : EF , PQ : QL = EF : FA . Finalmente , avendo LM , MN , NO , OP , PQ , QL ragioni ordinate ad AB , BC , CD , DE , EF , FA , sarà LM : LQ = AB : AF (§286), e , invertendo , QL : LM = FA : AB . Sicchè su LM s' è costrutto il rettilineo LMNOPQ simile al dato ABCDEF . Ch' è ciò che bisognava fare , e dimostrare .

PROP. XXIX. PROBL. IX.

337. *Dato il rettilineo ABCDEF , e data la ragione di AB : LR , costruire un' altro rettilineo simile al dato , al quale l' istesso rettilineo dato abbia la ragione di AB : LR.*

SOLUZIONE.

1. Si trovi tra AB , ed LR la mezza proporzionale LM (§ 318) .

2 Su LM si costruisca il rettilineo LMNOPQ simile ad ABCDEF (§ *prec.*) .

Dico essere LMNOPQ il rettilineo cercato .

DIMOSTRAZIONE.

Essendo i rettilinei ABCDEF , LMNOPQ simili per la costruzione ; ed essendo

AB , LM , LR continuamente proporzionali; saranno i rettilinei ABCDEF , LMNOPQ nella ragione di AB : LR (§ 333). Sicchè s' è costrutto il rettilineo LMNOPQ simile al dato , al quale l' istesso rettilineo dato ha la ragione di AB: LR . Ch' è ciò, che bisognava fare , e dimostrare .

CAP. VII.

Delle ragioni degli angoli fatti e ai centri , e alle circonferenze de' cerchi , e di quelle de' settori circolari .

PROP. XXX. TEOR. XXI.

338. *Ne' cerchi uguali AEB , CFD gli*
Fi.107 *angoli AOB , CPD fatti ne' centri , e gli angoli AEB , CFD fatti nelle periferie sono nella ragione degli archi AB , CD , su quali appoggiano ; ed i settori AOB , CPD sono pure nella ragione degli archi , da quali sono terminati .*

DIMOSTRAZIONE.

I. S' intendano gli archi AB , CD divisi nelle parti AG , GH , HI , IB , CK , KL , LD , delle quali ognuna sia uguale all' aliquo-

quota comune di essi ; e s' intendano dai centri O, e P tirate le rette OG, OH, OI, PK, PL. Saranno tutti gli angoli AOG, GOH, HOI, IOB, CPK, KPL, LPD uguali (§ 158, e 159). Perciò l' angolo AOG, e l' arco AG sono aliquote simili sì dell' angolo CPD, e dell' arco CD, che dell' angolo AOB, e dell' arco AB. Per la qual cosa l' angolo AOB sta all' angolo CPD, come l' arco AB all' arco CD (§ 257).

II. Gli angoli AEB, CFD, come metà di AOB, CPD (§ 165), sono nella ragione di AOB, CPD (§ 280), e perciò nella ragione di AB : CD (§ 245).

III. S' intenda rivoltato il settore AOG sul settore GOH. Combaciando l' angolo AOG con GOH, combacerà anche il settore AOG col settore GOH. Sicchè i settori AOG, GOH sono uguali (§ 57). Similmente si dimostra che ognuno de' settori HOI, IOB, CPK, KPL, LPD uguaglia il settore AOG. Perciò il settore AOG, e l' arco AG sono aliquote simili sì del settore CPD, e dell' arco CD, che del settore AOB, e dell' arco AB. Per la qual cosa i settori AOB, CPD sono nella ragione degli archi AB, CD (§ 257). Ch' è quanto bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

339. Quindi si ricavano le seguenti conseguenze. I. Che gli angoli fatti o al centro d' un' istesso cerchio, o alla periferia sono nella ragione degli archi, a' quali appoggiano; e che i settori d' un istesso cerchio sono pure nella ragione degli archi, da' quali sono terminati. II. Che ogni angolo fatto al centro d' un cerchio sta a quattro retti, come l' arco, al quale quello appoggia, all' intera periferia, o come il numero de' gradi dell' arco a 360°. III. Che ogni settore d' un cerchio sta all' intero cerchio, come l' arco, dal quale viene terminato il settore, all' intera periferia, o come il numero de' gradi del detto arco a 360°.

PROP. XXXI. TEOR. XXII.

Fi.108 340. *Sieno AEB, CFD due cerchi qualunque, e sieno formati angoli uguali AOB, CPD ne' centri, e per conseguenza angoli uguali AEB, CFD nelle periferie. Dico che gli archi AB, CD sono proporzionali alle intere periferie, e che i settori AOB, CPD sono proporzionali agl' interi cerchi.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

I. Essendo l' angolo AOB = CPD ; sarà l' angolo AOB a quattro retti come CPD a quattro retti (§ 262). E perciò l' arco AB sta alla periferia AEB , come CD alla periferia CFD (§ *prec.*); e, permutando, l'arco AB: CD , come la periferia AEB: CFD (§ 279).

II. Essendosi dimostrato essere l'arco AB alla periferia AEB , come CD alla periferia CFD; sarà il settore AOB al cerchio AEB, come il settore CPD al cerchio CFD (§. *prec.*). Onde , permutando sarà il settore AOB al settore CPD, come il cerchio AEB al cerchio CFD . Ch' è quanto bisognava dimostrare .

PROP. XXXII. TEOR. XXIII.

341. *Sieno AEB, CFD due cerchi qualunque, e sieno gli archi AB , CD proporzionali alle intere periferie , o i settori AOB, CPD proporzionali agl' interi cerchi . Dico essere uguali gli angoli AOB , CPD fatti ne' centri , e conseguentemente uguali gli angoli AEB, CFD fatti nelle periferie.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Essendo per l'ipotesi l'arco AB : CD, come la periferia AEB alla periferia CFD; sarà, permutando, l'arco AB alla periferia AEB, come l'arco CD alla periferia CFD (§ 279). E perciò sarà l'angolo AOB a quattro retti, come CPD a quattro retti (§ 339). Per la qual cosa l'angolo AOB = CPD (§ 264), e conseguentemente AEB = CFD.

II. Essendo pure per l'ipotesi il settore AOB : CPD, come il cerchio AEB : CFD; sarà, permutando, il settore AOB al cerchio AEB, come il settore CPD al cerchio CFD (§ 279). E perciò l'arco AB alla periferia AEB, come l'arco CD alla periferia CFD (§ 339). Onde l'angolo AOB = CPD, e conseguentemente l'angolo AEB = CFD. Ch' è quanto bisognava dimostrare.

CAP.

CAP. VIII.

Delle regioni, che hanno le periferie circolari, i cerchi, ed i ſettori, e le porzioni di eſſi, e della quadratura di tali ſpazj.

DEFINIZIONE.

342. *Simili* ſi dicono due archi circolari AB, CD, ſe ſono proporzionali alle intere periferie AEB, CFD. Parimente *ſimili* ſi dicono due ſettori AOB, CPD, e *ſimili* due porzioni circolari AB, CD, ſe vengono terminati da archi ſimili AB, CD. Fi. 108

COROLLARIO I.

343. Quindi, ſe gli archi AB, CD ſono ſimili, e conſeguentemente ſimili i ſettori AOB, CPD, e ſimili le porzioni AB, CD circolari, ſono uguali sì gli angoli AOB, CPD fatti ne' centri, che gli angoli AEB, CFD fatti nelle periferie (§ 341), e conſeguentemente uguali gli angoli fatti nelle porzioni AB, CD; e, ſe ſono uguali gli angoli AOB CPD, e conſeguentemente sì gli angoli AEB, CFD, che gli angoli fatti

nelle porzioni AB, CD, gli archi AB, CD ſono ſimili; e conſeguentemente ſimili sì i ſettori AOB, CPD, che le porzioni circolari AB, CD. E perciò le porzioni, che comprendono angoli uguali, ſono ſimili tra eſſe.

COROLLARIO II.

344. In oltre eſſendo i ſettori AOB, CPD proporzionali all' interi cerchi, ſe gli archi AB, CD ſono proporzionali alle intere periferie, ed al contrario: è manifeſto i ſettori ſimili eſſere proporzionali agl' interi cerchi, ed i ſettori proporzionali agl' interi cerchi eſſere ſimili tra eſſi.

LEMMA.

345. *Ogni archetto circolare infinitamente piccolo per riſpetto dell' intera periferia ſi può ſenza errore ſenſibile prendere come congruente colla ſua tangente.*

DIMOSTRAZIONE.

Fi.109 S' intenda nel centro O del cerchio AHL fatto l' angolo AOB infinitamente picciolo per riſpetto d' un retto, e molto più per riſpetto di quattro retti; e s'intendano tirate la corda AB, e la tangente AC, che s' uniſca col raggio OB prolungato in C.

Es-

Essendo l'arco AB all'intera periferia, come l'angolo AOB a quattro retti (§ 339); ed essendo l'angolo AOB infinitamente picciolo per rispetto di quattro retti, sarà l'archetto AB per rispetto dell'intera periferia anche infinitamente picciolo. In oltre l'angolo BAC, come metà dell'angolo AOB (§ 174), si può avere in conto d'un nulla per rispetto d'un retto. Dunque l'angolo OAB si può senza errore sensibile prendere per un retto, e conseguentemente come uguale ad OAC. Onde senza errore sensibile si può prendere la corda AB, come congruente colla tangente AC; e molto più l'archetto AB, che tramezza tra la corda AB, e la tangente AC, si può prendere come congruente colla tangente AC. Sicchè ogni archetto circolare, ec.. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XXXIII. TEOR. XXIV.

346. *Le periferie de' cerchi sono tra esse nella ragione de' raggi; ed i cerchi sono tra essi nella ragione de' quadrati de' medesimi raggi.*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno posti i due cerchi AHL, DKM uno sull'altro in modo, che O sia il centro comune di essi; e nel centro O s'intenda fat-

fatto l' angolo AOB, che sia infinitamente picciolo per rispetto d' un retto, e sieno di più per A, e D tirate le tangenti AC, DF. Si potranno senza errore sensibile prendere gli archetti AB, DE come congruenti colle tangenti AC, DF.

I. Essendo gli archetti AB, DE simili (§ 343); sarà la ragione delle periferie AHL, DKM uguale a quella degli archetti AB, DE (§ 342), e perciò uguale a quella delle rette AC, DF. Ma, per la simiglianza de' triangoli AOC, DOF, sta CA : DF = AO : DO (§ 299). Dunque la ragione delle periferie AHL, DKM è uguale a quella de' raggi AO, DO (§ 245).

II. Essendo gli archetti AB, DE simili, e conseguentemente simili i settori AOB, DOE; sarà la ragione de' cerchi AHL, DKM uguale a quella de' settori AOB, DOE (§ 344), e conseguentemente uguale a quella de' triangoli OAC, ODF. Ma la ragione de' triangoli OAC, ODF è uguale a quella de' quadrati di AO, DO (§ 331). Dunque i cerchi AHL, DKM sono tra essi nella ragione de' quadrati de' raggi AO, DO (§ 245). Ch' è quanto bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

347. Sieno i settori GOH, IOK simili, e conseguentemente simili le porzioni circolari

lari GH , IK . Saranno sì fatti settori nella ragione de' cerchi interi (§ 344) , e conseguentemente nella ragione de' quadrati de' raggi GO , IO (§ *prec.*) . Ed essendo i triangoli GOH , IOK pure nella ragione de' quadrati di GO , IO (§ 331) ; saranno anche le porzioni circolari GH , IK nella ragione de' quadrati de' raggi GO , IO (§ 290) . Dunque nella ragione de' quadrati de' raggi sono e i settori simili , e le porzioni circolari simili.

PROP. XXXIV. TEOR. XXV.

348. *Ogni cerchio è uguale ad un triangolo , che ha per base una retta uguale alla periferia , e per altezza il raggio.*

DIMOSTRAZIONE.

Rappresentino AHL qualunque cerchio , ed AB la parte infinitamente piccola della sua periferia. S' intendano tirati i raggi OA , OB , e per A tirata la tangente AC , che s' unisca col raggio OB prolungato in C. Sarà il cerchio AHL al settore AOB, come la periferia AHL all' arco AB (§ 339) , o come la periferia AHL alla tangente AC ; e perciò come il triangolo , che ha per base una retta uguale alla periferia AHL , e per altezza il raggio AO , al triangolo AOC (§ 322) , o sia al settore AOB . Sicchè il

il cerchio AHL è uguale ad un triangolo, che ha per baſe una retta uguale alla ſua periferia, e per altezza il raggio (§ 254). Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XXXV. TEOR. XXVI.

349. *Ogni ſettore circolare GOH è uguale ad un triangolo, che ha per baſe una retta uguale all' arco GH, e per altezza il raggio del cerchio.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè il ſettore GOH ſta al cerchio AHL, come l' arco GH alla periferia GHL (339); e perciò come il triangolo, che ha per baſe l' arco GH, e per altezza il raggio GO, al triangolo, che ha per baſe la periferia GHL, e per altezza l' iſteſſo raggio GO (§ 322). Ma il cerchio AHL è uguale al triangolo, che ha per baſe la periferia AHL, e per altezza il raggio GO (§ *prec.*). Dunque anche il ſettore GOH è uguale ad un triangolo, che ha per baſe una retta uguale all' arco GH, e per altezza il raggio GO del cerchio (§ 264). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

AVVERTIMENTO.

350. Si noti che per poter determinare una retta uguale alla periferia di qualunque cerchio, o a qualfisia arco circolare, non s' è trovata strada alcuna nè nella Geom. elementare, nè nella Geom. sublime. Si sono perciò i Geometri ingegnati di poterla determinare a un di presso con ricercare la ragione, che passa tra la periferia di qualunque cerchio, e 'l suo diametro, non vera, ma assai prossima alla vera; e in sì fatta ricerca sono proceduti sì innanzi, che l'errore nella detta determinazione puole rendersi insensibile a segno da non offendere punto l'esattezza geometrica. Come intanto si può determinare sì fatta ragione, e quale essa sia, si dirà nel capo seguente. Perciò sia il

CA-

CAP. IX.

Della ragione, che ſenza ſenſibile errore ſi può prendere per quella del diametro di qualunque cerchio alla ſua periferia.

LEMMA.

Fi.110 351. *I lati di due poligoni regolari ſimili, uno iſcritto in un cerchio, e l'altro circoſcritto intorno al medeſimo cerchio, ſono tra eſſi nella ragione della diſtanza dal centro del lato dell' iſcritto al raggio del cerchio.*

DIMOSTRAZIONE.

Contraſſegni AB il lato di qualunque poligono regolare iſcrittibile nel cerchio ABG. Si congiungano i raggi OA OB; e, diviſo l' arco AB in due parti uguali in E, ſi tiri per E la tangente CD, che s' uniſca co' raggi OA, OB prolungati in C, e D. Sarà CD un lato del poligono regolare circoſcrittibile intorno al cerchio ABG, e dell' iſteſſo numero di lati dell' iſcrittibile, a cui AB appartiene. Si congiunga di più OE. Dividendo OE l'arco AB in due parti uguali

in

in E, dividerà anche la retta AB in due parti uguali, e conseguentemente ad angoli retti in F (§ 140). Sicchè l'angolo OFA è retto. E' altresì retto l' angolo OEC (§ 150). Dunque AB, CD sono parallele (§ 82); e perciò i triangoli AOB, COD sono simili (§ 298). Per la qual cosa AB : CD = OA : OC (§ 299). Ma OA : OC = OF : OE (§ 292). Sicchè AB : CD = OF : OE (§ 245). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

352. Essendo OF : OE = AB : CD. Se la ragione di OF : OE è quasi d' uguaglianza, la ragione di AB : CD è anche quasi d' uguaglianza. Dunque qualora la differenza di OF dal raggio OE è poco sensibile, poco sensibile è anche la differenza de' lati AB, CD; e molto meno sensibile è la differenza dell' arco AEB da' medesimi lati AB, CD. Per la qual cosa se due poligoni regolari simili sono uno iscritto in un cerchio, e l' altro circoscritto intorno dell' istesso cerchio, e la differenza, che passa tra la distanza del lato dell' iscritto dal centro, e'l raggio è poco sensibile, si può allora senza errore sensibile prendere pel cerchio ciascuno di sì fatti poligoni, e per la sua periferia il perimetro de' medesimi poligoni.

AV-

AVVERTIMENTO I.

353. Si noti che, congiunta AE, lato del poligono regolare iſcrittibile pure nel cerchio ABG, e d'un numero di lati doppio del numero de' lati del poligono, a cui appartiene AB, ed eſpreſſi co' numeri della medeſima unità il raggio AO, e 'l lato AB, ſi poſſono ſucceſſivamente trovare tre altri numeri della medeſima unità de' detti, eſprimenti uno la retta OF, con eſtrarre la radice quadrata dalla differenza de' quadrati fatti co' numeri eſprimenti le rette OA, AF, l'altro la retta EF, con togliere dal numero eſprimente il raggio quello, ch' eſprime OF, e 'l terzo la retta AE, con eſtrarre la radice quadrata dalla ſomma de' quadrati de' numeri eſprimenti AF, FE. E ſi può altresì avere relativamente alla medeſima unità il numero esprimente CD, con trovare il quarto proporzionale in ordine ai tre numeri eſprimenti OF, OE, AB, e conſeguentemente con dividere, ſe ſarà OE = 1, il numero eſprimente il lato AB pel numero eſprimente la diſtanza OF dal centro.

AVVERTIMENTO II.

354. Si noti di vantaggio che, per eſprimerci con brevità nel probl. ſeguente, contraſ-

traſſegneremo con AB^2 il quadrato della retta AB, e con $\frac{1}{4} AB^2$ la quarta parte del medeſimo quadrato. Di più contraſſegneremo con $AB^2 + CD^2$ la ſomma de' quadrati delle rette AB, CD, e con $AB^2 - CD^2$ la differenza de' medeſimi quadrati, intramettendo tra AB^2, e CD^2 nel primo caso il ſegno +, che s' esprime col vocabolo *più*, e nel ſecondo caso il ſegno —, che s' esprime col vocabolo *meno*. Ciò poſto, venghiamo alla

PROP. XXXVI. PROBL. X.

355. *Trovare una ragione, che ſenza errore ſenſibile ſi poſſa prendere per quella del diametro di qualſivoglia cerchio alla periferia.*

SOLUZIONE.

1. Si metta di qualunque cerchio ACB il raggio OA = 1; e nel medeſimo cerchio ſia adattata AB, lato dell' eſagono regolare iſcrittibile in eſſo. Sarà AB = OA = 1 (§ 198). Fig. 111

2. S' intendano diviſi in due parti uguali ſucceſſivamente gli archi AB in C, AC in D, AD in E, AE in F, AF in G, ec., e s' intendano tirate le rette AC, AD, AE, AF, AG, ec.. Saranno AC, AD, AE, AF, AG, ec. lati delle figure regolari di 12, 24, 48, 96, 192, ec. lati, iſcittibili

pure nel cerchio ACB.

3. Relativamente al raggio, posto = 1, si vadano successivamente trovando e i numeri esprimenti i quadrati di AC, AD, AE, AF, AG, ec., ed i numeri esprimenti le distanze di sì fatti lati dal centro O (§ 353); e ciò si faccia, finchè si pervenga a un lato, la cui distanza dal centro sia quasi = 1.

4. Si determini il numero esprimente il lato, la cui distanza dal centro è quasi = 1; e s' avrà il numero esprimente un lato del poligono regolare iscrittibile nel cerchio, il cui perimetro di poco mancherà dalla periferia del medesimo cerchio (§ 352 (.

5. Si divida il numero esprimente il lato del detto poligono pel numero esprimente la sua distanza dal centro; e s' avrà il numero esprimente un lato del poligono regolare circoscrittibile intorno all'istesso cerchio, e dell' istesso numero di lati dell' iscrittibile anzidetto (§ 353); il perimetro del quale poligono circoscrittibile di poco eccederà la periferia del cerchio (§ 352).

6. Si moltiplichino i numeri esprimenti i lati determinati de' due detti poligoni pel numero de' lati di essi; e così s' avranno i numeri esprimenti i perimetri de' medesimi poligoni.

Le ragioni de' numeri esprimenti i detti perimetri al numero 2, esprimente il diametro del cerchio, saranno i limiti, tra' qua-

quali sarà racchiusa la ragione della periferia del cerchio al diametro ; e tali limiti saranno più , o meno prossimi tra essi , secondochè la distanza dal centro de' lati del poligono iscrittibile nel cerchio, che si prenderà , come poco diverso dal cerchio , avrà una differenza dal raggio meno , o più sensibile . La ragione poi della metà della somma de' numeri esprimenti i medesimi perimetri al 2 sarà la ragione , che senza errore sensibile si potrà prendere per quella della periferia del cerchio al diametro . Eccone il

CALCOLO

Si congiungano le rette OC , OD , OE , OF , OG , ec.. Essendo AO = AB = 1 , sarà AH = $\frac{1}{2}$ = 0 . 500000. Onde sarà .

I.

$OH^2 = OA^2 - AH^2 = 0.\ 750000000000$.

E perciò

$OH = 0.\ 866025$
$HC = OC - OH = 0.\ 133975$
$AC^2 = AH^2 + CH^2 = 0.\ 267949300625$.

II.

$OI^2 = OA^2 - \frac{1}{4} AG^2 = 0.\ 933912674844$

E perciò

$OI = 0.\ 965925$
$ID = OD - OI = 0.\ 034075$
$AD^2 = AI^2 + ID^2 = 0.\ 068148430781.$

III.

$OK^2 = OA^2 - \frac{1}{4} AD^2 = 0.\ 982962802305.$

E perciò

$OK = 0.\ 991444$
$KE = OE - OK = 0.\ 008556$
$AE^2 = AK^2 + KE^2 = 0.\ 017110312831.$

IV.

$OL^2 = OA^2 - \frac{1}{4} AE^2 = 0.\ 995722421793.$

E perciò

$OL = 0.\ 997858$
$LF = OF - OL = 0.\ 002142$
$AF^2 = AL^2 + LF^2 = 0.\ 004282166371.$

V.

V.

$OM^2 = OA^2 - \frac{1}{4} AF^2 = 0.\ 998929458408.$

E perciò

$OM = 0.\ 999464$
$MG = OG - OM = 0.\ 000536$
$AG^2 = GM^2 + AM^2 = 0.\ 001070828888.$

VI.

$OP^2 = AO^2 - \frac{1}{4} AG^2 = 0.\ 999732292778.$

E perciò

$OP = 0.\ 999866.$

Venendo dunque la distanza OP del lato AG del poligono regolare di 192 lati quasi = 1, il perimetro di sì fatto poligono mancherà di poco dalla periferia del cerchio. Or essendosi trovato AG^2 AG = 0. 001070828888, sarà AG = 0. 032723; e perciò l' intero perimetro di sì fatto poligono = 6. 282816. Di più il lato del poligono regolare di 192 lati circoscrittibile intorno al medesimo cerchio sarà $\frac{0.\ 032723}{0.\ 999866} = 0.\ 0327227$ (§ 353). Sicchè

chè il perimetro di queſt' altro poligono sarà = 6 . 283584 . Per la qual coſa le ragioni di 6. 283584 : 2, e di 6 . 282816 : 2 ſono i limiti baſtantemente proſſimi , tra' quali è racchiuſa la ragione della periferia del cerchio al diametro . Onde la ragione, che ſenza ſenſibile errore ſi potrà prendere per quella della periferia al diametro , ſarà la ragione di 6 . 283200 : 1 ; o di 3 . 1416 : 1 , o di 3 . 141 : 1 . Ch' è ciò , che biſognava trovare.

AVVERTIMENTO.

356. Si noti che l' inſigne Archimede prima di tutti trovò eſſere della ragione della periferia al diametro quella di 22 : 7 alquanto maggiore della ve[illegible] , e quella di 223 : 71 alquanto minore . Metio trovò la ragione della periferia al diametro eſſere a un di preſſo uguale alla ragione di 355 : 113 ; e queſta ragione è più proſſima alla vera di quella di 22 : 7 . Ludolfo a Ceulen ne ha data una ragione aſſai proſſima alla vera , ma compoſta da moltiſſimi caratteri ; e noi nel 2° tomo degli elementi di Algebra ne abbiamo data un' altra più proſſima di quella di Ceulen , però con maggior numero di caratteri . Del reſto noi faremo ſempre uso , quando il biſogno l' eſigerà, della ragione qui determinata, cioè di quella di 3 . 141 : 1 , per essere eſſa baſtantemen-

mente prossima alla ragione vera della periferia al diametro, e assai comoda nella pratica, come si vedrà a suo luogo.

Fine del Libro quarto.

666447

Tav. I.

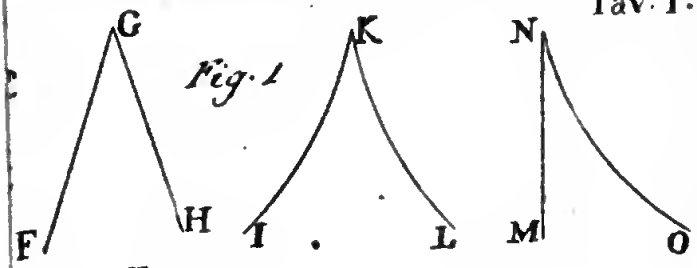
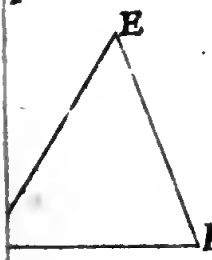


Fig. 1



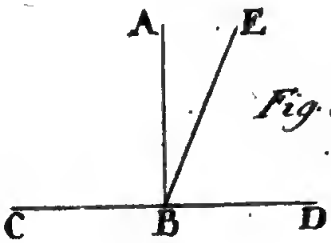
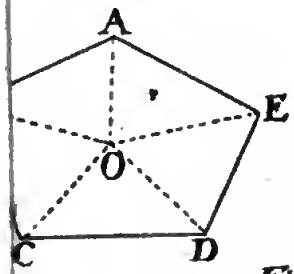


Fig. 3



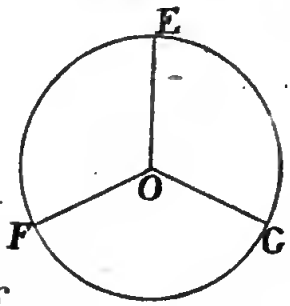
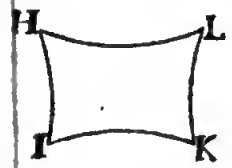
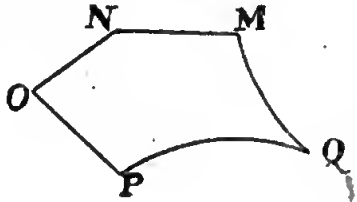
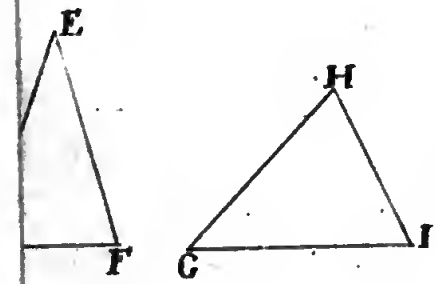


Fig. 6







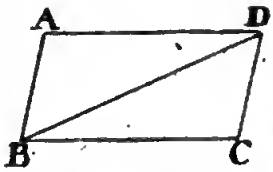
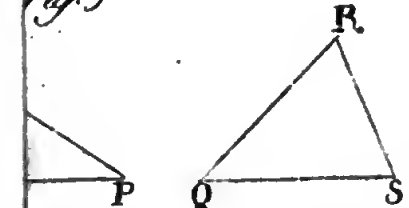


Fig. 7

Fig. 8



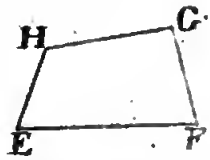


Fig. 9

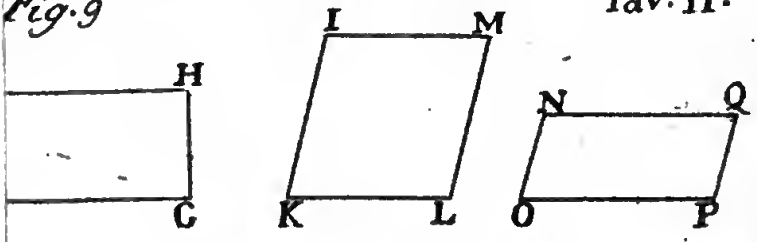


Fig. 11

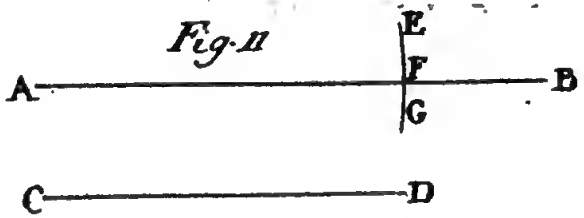


Fig. 12

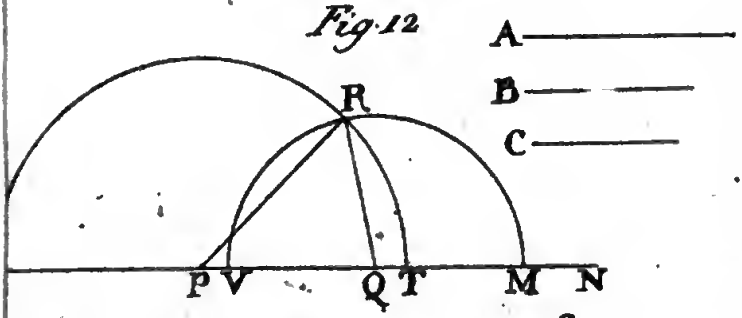


Fig. 14

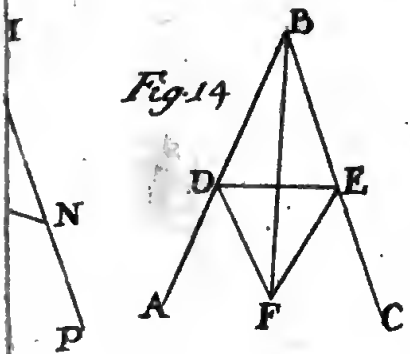


Fig. 15

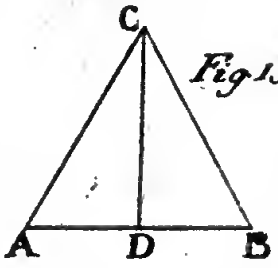


Fig. 17

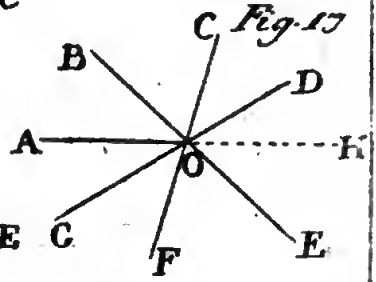
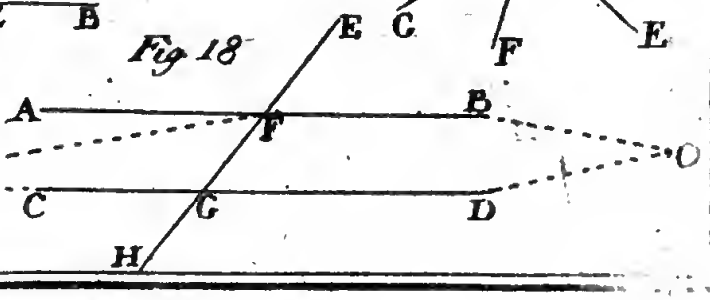
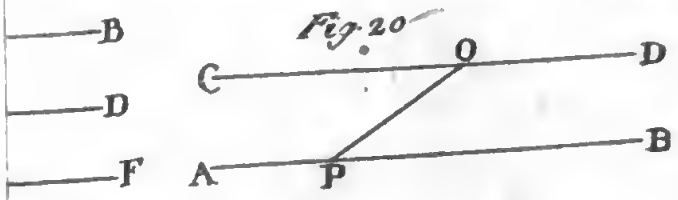


Fig. 18




B
D
F
Fig. 20
C
O
D
A
P
B

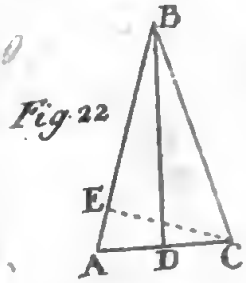


Fig. 22
B
E
A
D
C

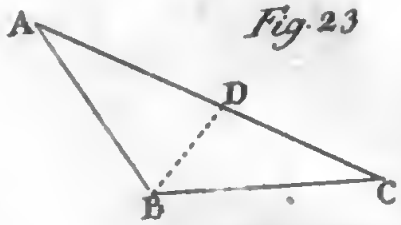
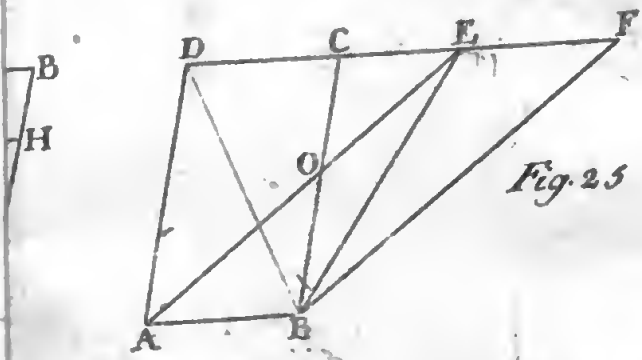


Fig. 23
A
D
B
C


B
H
D
C
E
F
O
Fig. 25
A
B

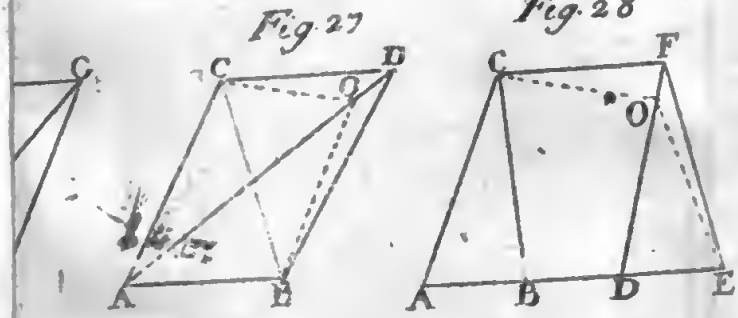
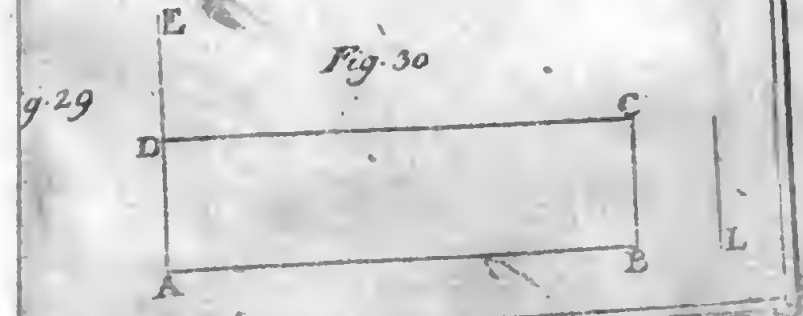


Fig. 27
Fig. 28
C
C
D
C
F
O
O
A
B
A
B
D
E


E
Fig. 30
g. 29
C
D
L
A
B

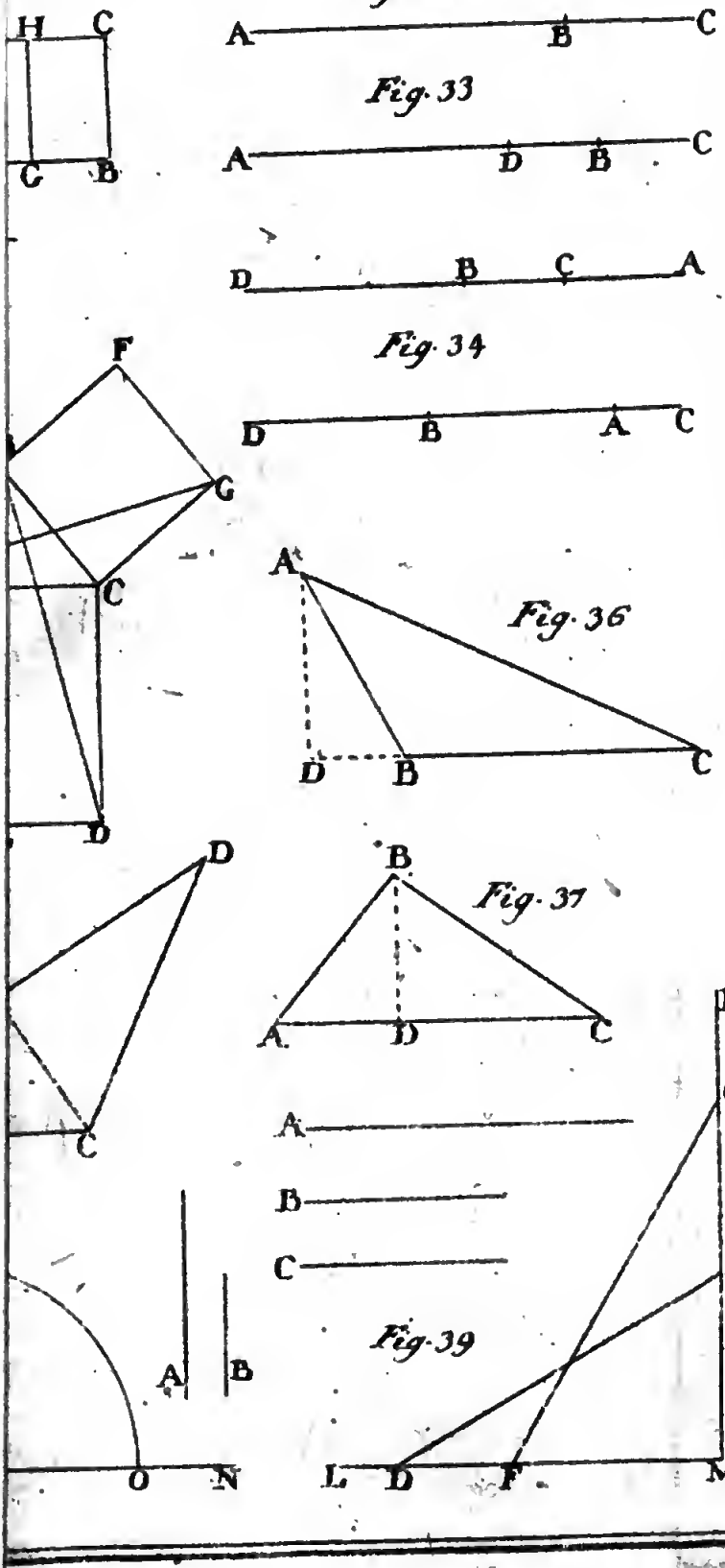


Fig. 32
H C
C B
A B C
Fig. 33
A D B C
D B C A
Fig. 34
F
G
C
D
D B A C
A
Fig. 36
D B C
D
C
B
Fig. 37
A D C
A
B
C
A B
O N
N
G
E
L D F M

Tav. V.

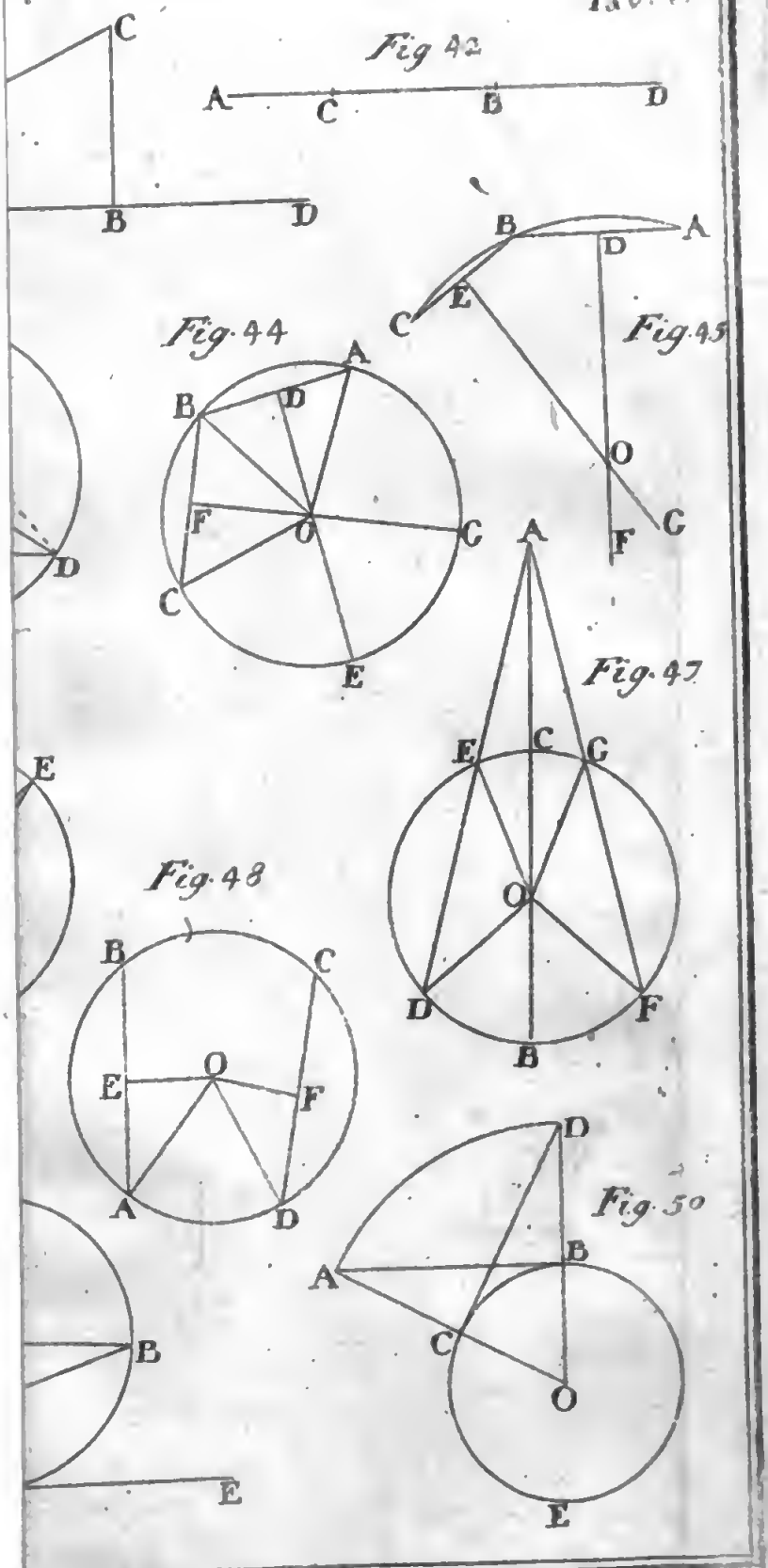


Fig 42
A
C
B
D
C
B
D
Fig 44
A
B
D
F
O
C
C
E
D
Fig 45
B
A
D
E
C
O
F
C
Fig 47
A
E
C
G
O
D
F
B
E
Fig 48
B
C
E
O
F
A
D
B
E
D
Fig 50
B
A
C
O
E

.51

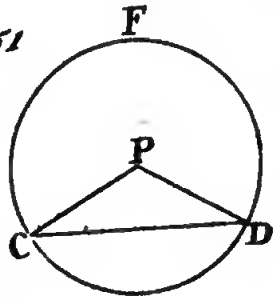
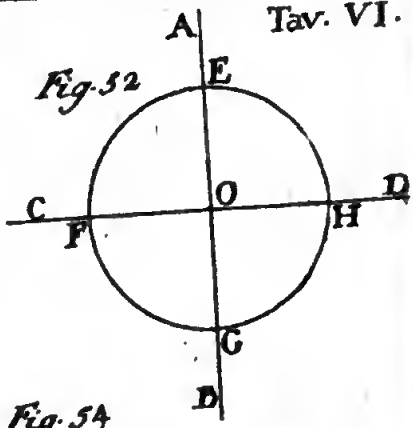


Fig. 52



A

Fig. 54

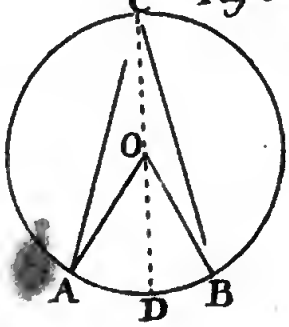


Fig. 55

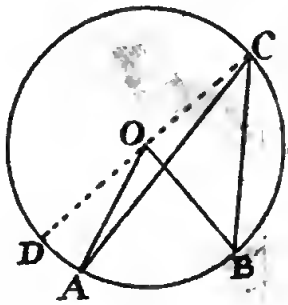


Fig 57

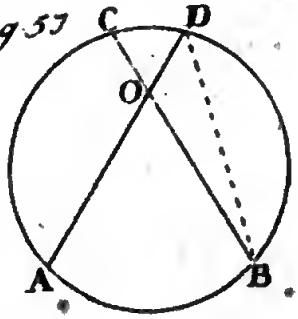
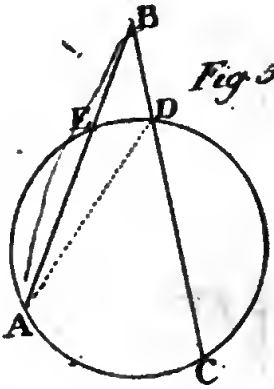


Fig. 58



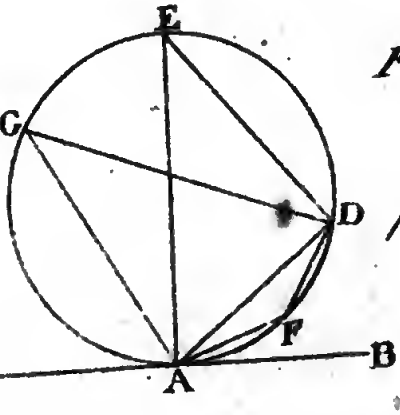


Fig. 60

Tav. VII.

Fig. 63

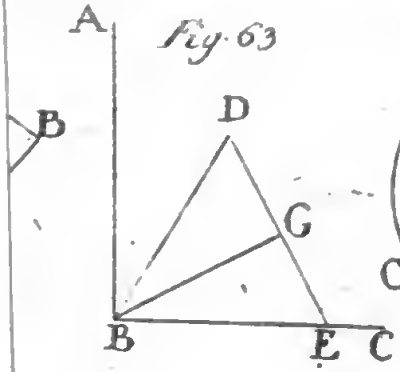


Fig. 64

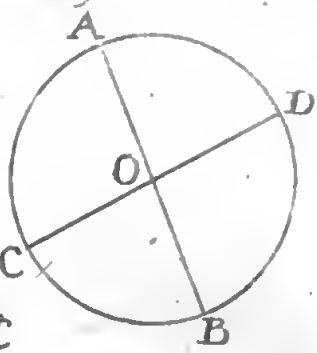


Fig. 66

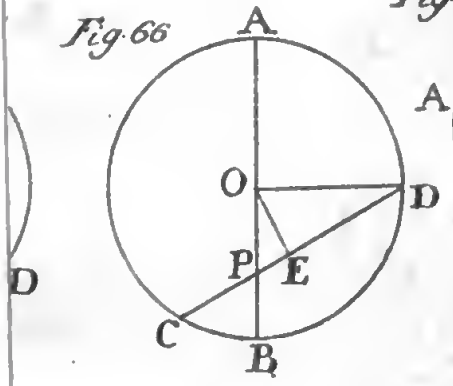


Fig. 67

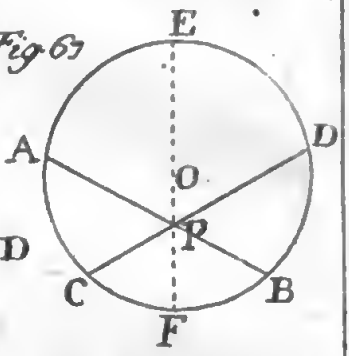
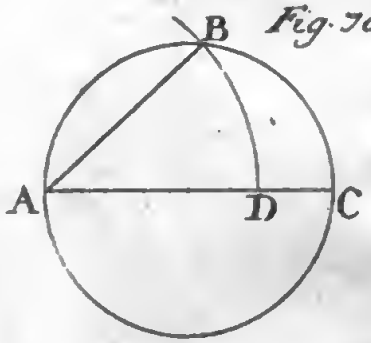


Fig. 70



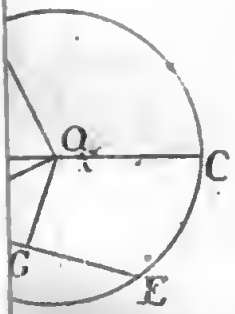
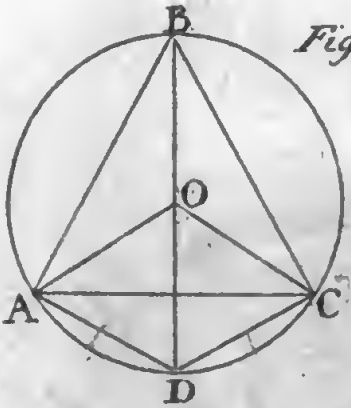


Fig. 71



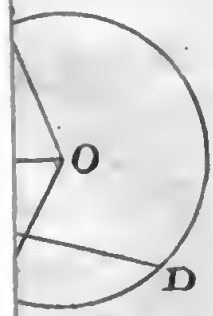


Fig. 74

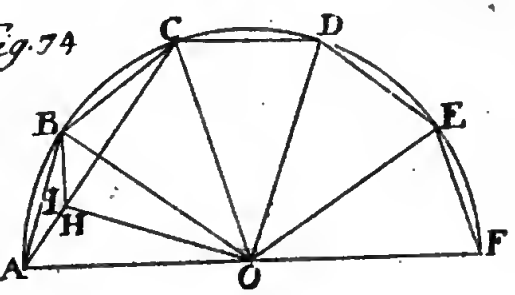


Fig. 73

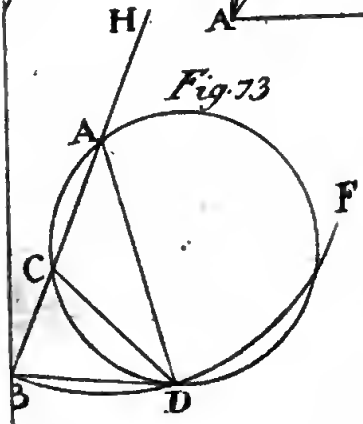


Fig. 75

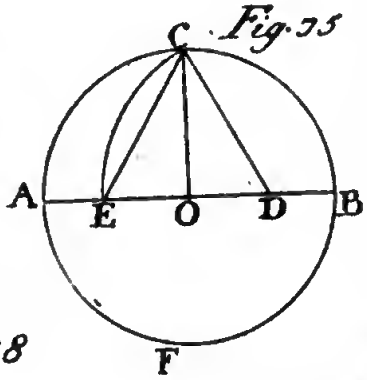


Fig. 78

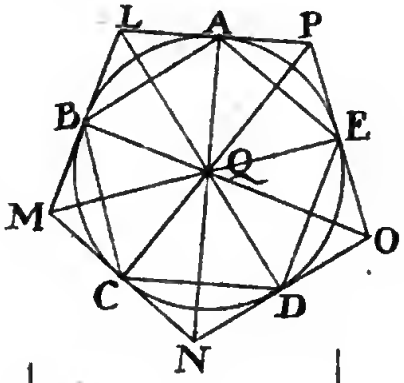
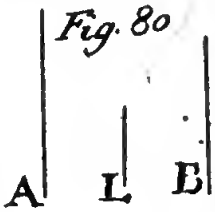


Fig. 80



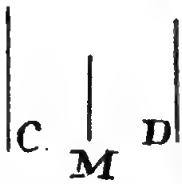


Fig. 81

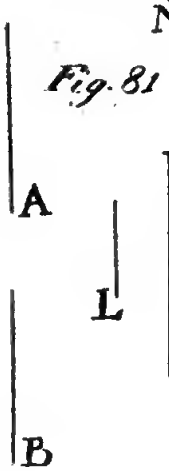
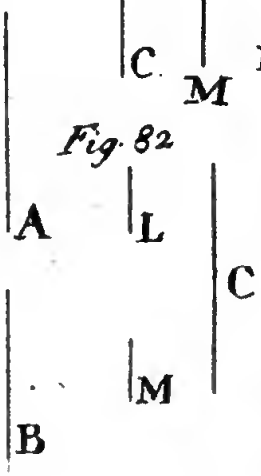


Fig. 82



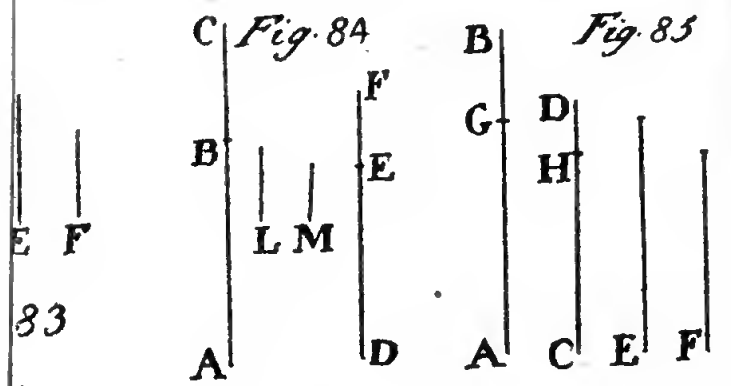


Fig. 84
C
B
A
F
E
D
L M
Fig. 85
B
G
A
D
H
C
E
F
E F
83
P Q

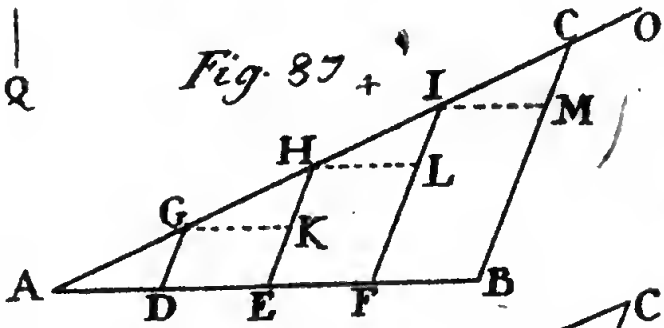


Fig. 87
C
O
I
M
H
L
G
K
A
B
D
E
F

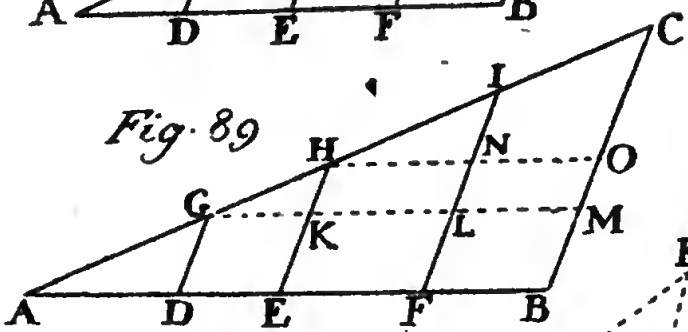
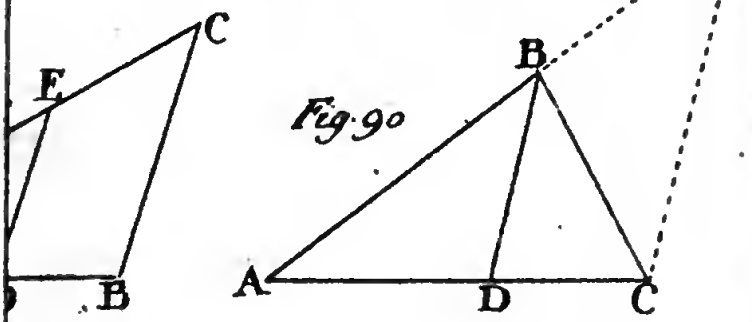


Fig. 89
C
I
H
N
O
G
K
L
M
A
D
E
F
B


E
C
E
B
Fig. 90
B
A
D
C

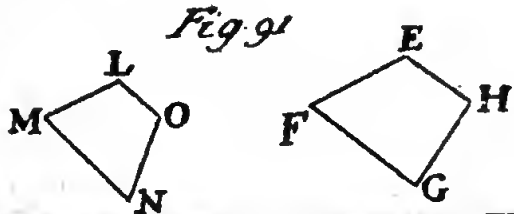


Fig. 91
L
M
O
N
E
F
H
G

Tav. X.

Fig. 92

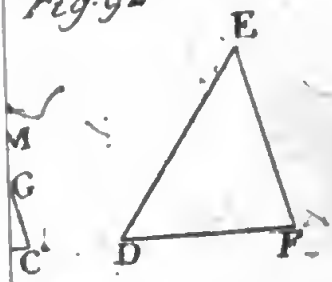


Fig. 93

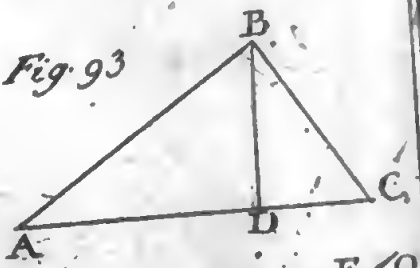


Fig. 94

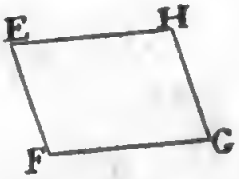
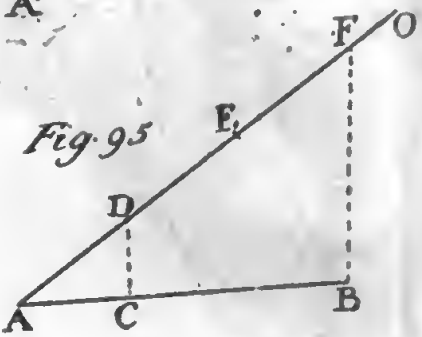


Fig. 95



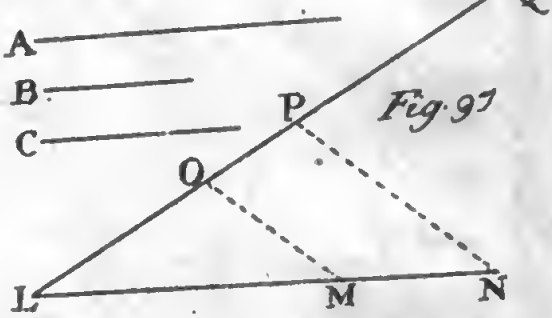


Fig. 97

Fig. 98

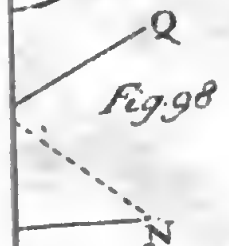
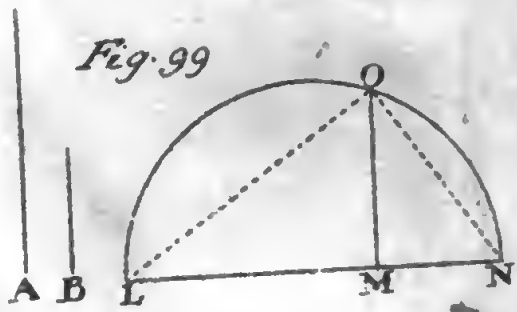


Fig. 99



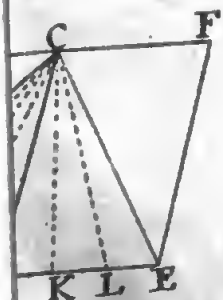
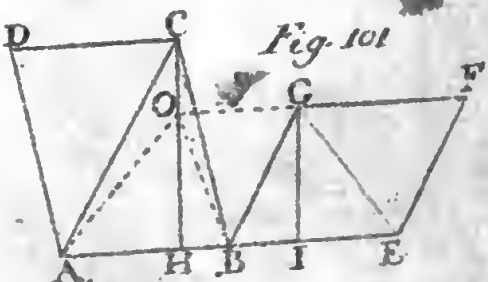
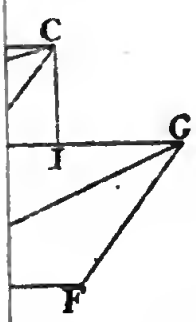
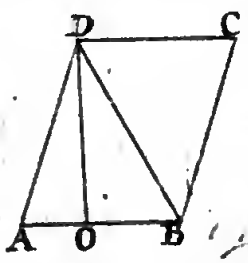


Fig. 101







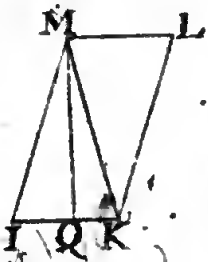


Fig. 102

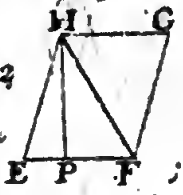
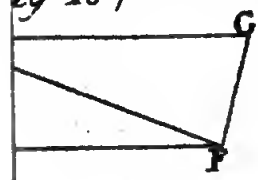


Fig. 104



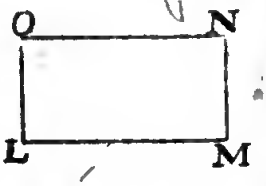
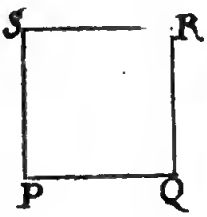
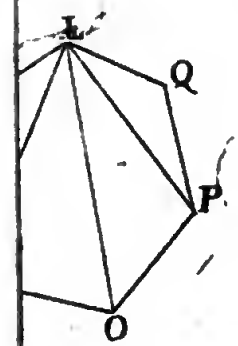
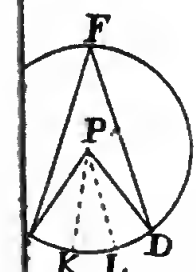


Fig. 105







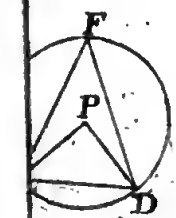
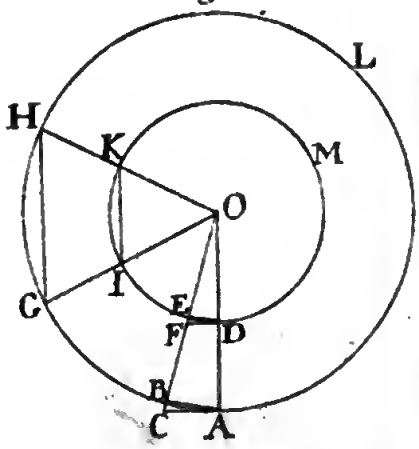


Fig. 109



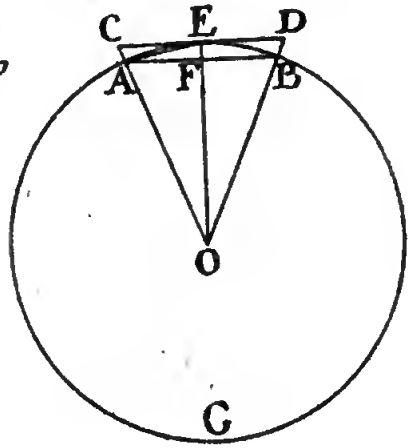


Fig. 110

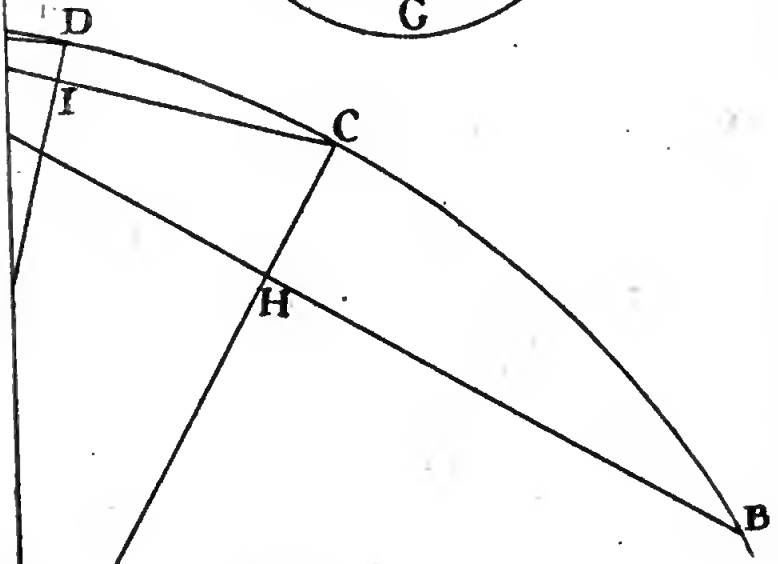


Fig. 111

Digitized by Google